

रेखामिति तत्व

श्रीमन्महागजाधिगज पश्चिमदेशाधिकारी
श्रीयुत नब्बाब लेफ्टिनेंट गवर्नर बहादुर की

आज्ञानुसार

श्रीमद्विद्या संपन्न श्री साहिब डैरेकुर आफ पबलिक

इन्स्ट्रक्शन् सुमालिक मंगरवी की

अनुमति से

पश्चिमदेशीय चटशालों के विद्यार्थियों के लिये

पण्डित कुंजबिहारीलाल ने

अंगरेज़ी से हिंदी भाषा में उल्लू किया ॥

इलाहाबाद

गवर्नमेंट के छापेखाने में छापा गया

सन् १८६१ ई०

2nd Edition, 5,000 copies, } { दूसरी बार ५,००० पुस्तकें
Price per copy, 8 Annas. } { मोल फी पुस्तक ॥ आने

रखामिति तत्त्व

श्रीमन्महाराजाधिराज पश्चिमदेशाधिकारो
श्रीयुक्त नब्बाब लेफ्टिनेट गवर्नर बहादुर की

आज्ञानुसार

श्रीमद्विद्या संपन्न श्री साहिब डैरेकूर आफ पबलिव्
इन्स्ट्रक्शन् मुमालिक मगरवी की

अनुमति से

पश्चिमदेशीय चटशालों के विद्यार्थियों के
लिये

पण्डित कुंजबिहारीलाल ने

अंगरेज़ी से हिन्दी भाषा में उलथा किया ॥

इलाहाबाद

गवर्नमेंट के छापेखाने में छापा गया

सन् १८८१ ई०

रेखागणित का सूचीपत्र

आशय

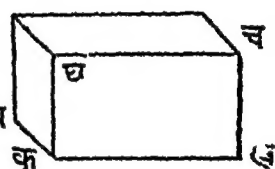
पृ

रेखागणित सम्बन्धीय प्रथम विचार परिभाषा और	
आदि हेतों का वर्णन	१
प्रश्न और उन के कारणों का प्रकार	१३-१६
संज्ञाओं की व्याख्या और प्रक्रिया	२१
कोण, चिकोण, और समानान्तर रेखाओं के विषय के	
साध्यों का विषय	२५
समान्तरबाहु तथा अन्य चतुर्भुजों के विषय के प्रमेय और	
उपपाद्य	३०
रेखागणित का सेंतालीसवां क्षेत्र और उसके आधीन	
समकोण क्षेत्रों के कुछ विशेष गुणों का वर्णन	५३
रेखा तथा क्षेत्रों की निष्पत्ति, सजातीय त्रिभुज	५८
वृत्त विषयक साध्य	६६
स्तर वा घरातल और घन पदार्थों के विषय के साध्य	६७
रेखागणितीय अभ्यास प्रश्न	११४
रेखागणित में बीज क्रिया के प्रयोग	१३१

रेखागणित

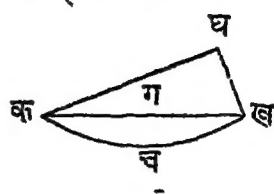
रेखागणित सम्बन्धीय प्रथम विचार, परिभाषा,
और आदि हेतों का वर्णन

१ रेखागणित, गणितशास्त्र का वह भाग है जिस में, रेखा, धरातल, वा पृष्ठ, और घनपदार्थों के विशेष गुणों का निरूपण है हर एक पदार्थ के तीन प्रकार के परिमाण होते हैं यथा, लंबाई चौड़ाई और मुटाई वा गहराई, यथा एककाष्ठ के सहतीर में क ख, लंबाई क ग, चौड़ाई और क घ, मुटाई वा गहराई है पदार्थों की सीमा, वा अवधि, पृष्ठ वा धरातल होते हैं यथा, क घ च ख, एक धरातल है इसी रीति से मेज का ऊपर, वा पृष्ठ, कहने से उसके ढल, वा मुटाई का कुछ भान नहीं होता, तथा किसी सरोवर का जलपृष्ठ कहने से उसकी गहराई से कुछ काम नहीं, धरातल वा पृष्ठों की भीमा, वा क्षेत्र, रेखारूप



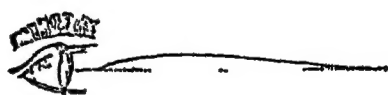
होते हैं, यथा, क ख, ग्रान्त, वा कोर, रेखारूप है ॥ इसी रीति से मेज की कोर कहने में उसके विस्तार का कुछ ज्ञान नहीं होता, जहा रेखा एक दूसरे को काटती, वा मिलती है, उस चिन्ह को बिन्दु वा चिन्ह भी बोलते हैं ॥

२ दो बिन्दु के मध्य के लघुतम मार्ग वा दूरी को रेखा कहते हैं, क, ख, दो बिन्दु वा स्थानों की मध्य दूरी की ठीक साप, क ग ख सरल रेखा की लंबाई



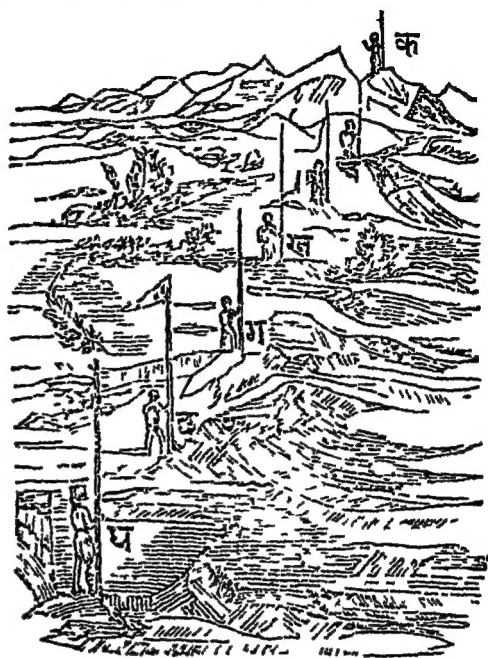
है कोई मनुष्य, क, एक स्थान से ख, किसी दूसरे स्थान को सीधे से सीधे मार्ग होकर गया चाहे तो वह, क ग ख, सीधी रेखा में चलेगा, और दाये बायें को नहीं फिरेगा, परंतु जो वह, क च ख, वक्र, वा क घ ख, कुटिल रेखा में होकर जावेगा, तो उसे, क ग ख, की अपेक्षा अधिक दूर चलने पड़ेगा, इससे यह आता है कि क घ ख त्रिभुज में क घ, घ ख, दो भुजा मिलकर, क ख, तीसरी भुजा से, बड़ी वा लंबी होती हैं ॥

३ सीधी कोर वा शलाका बनाने में, खाती लोग, उस कोर की सीध में अपने नेत्र को रखकर, उसके प्रत्येक भाग



को देखेंगे तो निश्चित करलेवेगे, कि यह सीधी है, परंतु केवल एक ही सिरे, और मध्यभाग को देखेंगे, तो जानेगे कि यह झुकी है, वा गोल है, तथा, जो उस कोर के केवल दोनों सिरे ही दीखे, और, मध्यभाग न दीखे, तो जाना जावेगा, कि यह बीच से खाली है, इसका हेतु यह है, कि सब पदार्थों से जो प्रकाश की किरणें नेत्र को आती हैं वे सरल रेखा रूप होती हैं ॥

४ इसी हेतु से, जब कोई जरीबवाला, क से घ तक दो बिन्दुओं के बीच में भूमि पर सीधी रेखा खेचा चाहे तो वह कई एक चिन्हों पर बीच में बांस, वा भूडे खडे करेगा, और फिर, छोरों के, क और घ भंडों की सीध में दृष्टि लगाकर, उन दोनों के योग की रेखा में जब बीच के भूडे होवे उन्हें देख



सकेगा अथवा जो दो वासों के, यथा क, और च, के योग की रेखा को, ख तक बढ़ाया चाहे तो, ख, के पास कोई स्थान पर एक और बांस रखकर, देखेगा कि ये ख, च, क तीनों बांस कहां से एक दूसरे की एक ही रेखा में आते हैं, फिर वही चिन्ह, ख वद्धित, क च, रेखा में होवेगा, और इसी रीति से, और भी बिन्दु, निश्चित हो सके हैं, इस रीति से, कोसों तक पहाड़, और खाड़ियों में, हो किसी देश के ओर से छोर तक चाहे जैसी ठीक रेखा खेचलो, और इसी रीति से, जरीबवाले, जरीब और शरा के द्वारा क्षेत्रों में हर एक सरल रेखा बिना भूडे के भी माप सके हैं ॥

५ कोई, ग, सरल रेखा एक और क ख, रेखा के क ग ख साथ हटाई जावे तो, वे दोनों हर एक स्थिति में एक दूसरे के ठीक अनुरूप रहेंगी, क्योंकि अन्यथा जहां कि वे नहीं

मिलेगी, वहां यह सिद्धान्त न रहेगा, कि बिन्दुओं के बीच में छोटी से छोटी दूरी, रेखा होती है ॥

६ वेद्यमाण प्रश्न इसलिये लिखे जाते हैं कि उपाध्याय लोगो को, किस प्रकार से, प्रश्नों के द्वारा, रेखागणित में अति गूढ़ आशय, विद्यार्थियों के मन में डाला चाहिये, प्रायः जो कुछ इस ग्रंथ में रेखागणित का विषय है, वह इस रीति से विद्यार्थियों को समझाना चाहिये ॥

गुरु० क ख, रेखा को, क्या कहते हैं ? क————ख

विद्यार्थी० इसे सरल रेखा कहते हैं,

गु० क ख, और ग घ, दो रेखाओं में से कौन सी बड़ी है ?

वि० क ख, रेखा बड़ी है, क————ख ग————घ

गु० तुम इसे ठीक २ कैसे निश्चय कर सके हो ?

वि० ग घ, रेखा को, क ख, पर रखने से,

गु० क च ख, रेखा, किस प्रकार की है (२ प्रक० की आकृति में) ?

वि० यह बक्र रेखा है, जिसे बहुधा बक्रा कहते हैं,

गु० ठीक है परंतु इसे टेढ़ी रेखा भी कहते हैं, कहो,

क च ख, बक्र रेखा और क ख, सरल रेखा में कौन सी छोटी है ?

वि० क ख, सरल रेखा,

गु० तुम पृथिवीनाथ से नौमहले को गया चाहो, तो किस रेखा में चलोगे ?

वि० सरल रेखा में, (क्योंकि) पृथिवीनाथ और नौमहले के बीच में लघिष्ठ दूरी सरल रेखा होवेगी,

गु० क ख, और ग घ, सरल रेखाओं क————ख के विषय में, अब तुम क्या कहोगे ? ग————घ

वि० वे समान देख पड़ती हैं, तथा एक दूसरे से मिला जा जाना जाता है,

गु० वा इस रीति से कहो कि, ग घ = क ख, और ग य, = क ख, के समानान्तर भी है कहो, अब,

ग घ, क ख के समानान्तर है ?

क ————— ख
ग ————— घ

वि० नहीं, क्योंकि, ग घ, क ख से बाई और मिल जायगी,

गुरु० अब वे किस ओर मिलेंगी ?

क ————— ख
ग ————— घ

वि० दाहिनी ओर,

गु० कहो, इस से समानान्तर रेखाओं का असाधारण, वा विशेष धर्म, अथवा, लक्षण, क्या पाया जाता है ?

वि० यह है, कि चाहे जहां तक उन्हें दोनों ओर बढ़ावें, वे कभी नहीं मिलेंगी ॥


७ जिस धरातल में, कोई से दो बिन्दु के मध्य की रेखा सरल होवे, तो उसे सम, वा एकसा चपटा, अथवा रन्दा, कहेंगे, यथा, किसी मेज पर सीधी शलाका रखने से, प्रत्येक स्थान में, प्रत्येक बिन्दु, उसे छुवे, तो उस मेज को पृष्ठ से, समपृष्ठ कहेंगे, समपृष्ठ को निश्चय करने के लिये, उसकी सीध में अपना नेत्र रखकर देखो, जो एक ही काल में पृष्ठ का हर एक बिन्दु दीख पड़े तो जानो कि वह पृष्ठ सम है इस रीति से ये सब क्षेत्र समपृष्ठ पर खिंचे हैं ॥

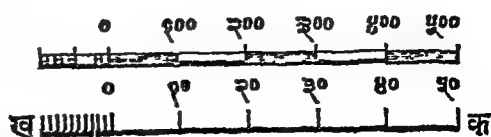
८ रेखाओं का मापना — कर्मकार, दो छड़ियों को, कि वे समान है कि नहीं यह जानने के लिये, एक को दूसरी पर, उन्हें के एक ओर के सिरे मिलाकर रखता है, अब उन्हें के दूसरे सिरे भी मिल जावेंगे तो उसे निश्चय होगा कि ये दोनों समान है, सिद्धान्तीय रेखागणित में यह रीति, एक प्रथम ही उपक्रम है यथा, क ————— ख, और ग ————— घ दो समान लंबाई की

रेखा है, अब, ग घ, को क, ख पर ऐसे धरे कि एक का, घ, सिरा दूसरे के, ख, सिरे से ठीक २ मिलजावे तो पहली का, ग सिरा भी दूसरी के, क सिरे से मिलजावेगा, और, क ख, से ग घ, बड़ी होगी, तो, ग, मिरा, क, से दाहर बड़ जावेगा, तथा, क ख, से ग घ, छोटी ही होगी तो, ग, सिरा, क, सिरे तक पहुचेगा भी नहीं,

ख ग क

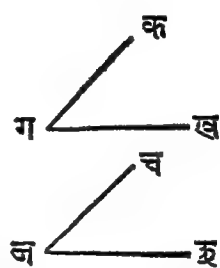
क ख, रेखा का मध्य, ग, होवे और, ग, से ग ख, को लौट लेवे तो, ख ग, ठीक २ क ग, रेखा से मिलजावेगी, और, ग, चिन्ह पर, क ख, रेखा के सम दो भाग होजावेगे, क ग ख

समान रेखाओं के मापने में, बहुधा, पङ्कार, अर्थात्, कंपास, काम आते हैं, यथा, क ख, रेखा में से, ख ग, भाग, घ च, के तुल्य किया चाहें, तो घ च, रेखा को, कंपास से घ च केवल, लेकर, ख ग, पर रखने से इष्टसिद्धि होजावेगी, रेखाओं की लंबाई मापने के लिये, कोई  माप की एकाई ठहरालेना आवश्यक होता है, कि जै वेर किसी रेखा पर और से छोर तक वह आवे, उतनी एकाई उस रेखा में होवेंगी, यथा, माप की एकाई, इछ होवे, तो रेखा की लंबाई इछों में आवेगी, और माप की एकाई फुट होगी, तो वह फुटों में, आवेगी, ऐसे ही औरों में भी जानना, विचारित रेखा में माप की एकाई ठीक २ न आसके तो उस शेष भाग की लंबाई, उस एकाई के कोई भिन्न अंश से प्रकाशित की जावेगी, रेखाओं की लंबाई मिलाने के लिये समभागकी माप बना-
ने के अर्थ, कंपासों का,



कोई सूक्ष्म चन्तर लेलो, और उसे दश वेर दुहराओ, कि जिस से ख०, एक भाग होजावे, अब ख०, के तुल्य कंपासो के अन्तर से, १०, २०, ३० आदि समभाग चिन्ह तक करलो, तो, ख०, के हरएक भाग को एकाई मानने से, ० से १० तक दूरी दश एकाई होगी, तथा, ० से २० तक २० एकाई इत्यादि होगी, और, ख०, का हरएक भाग १० एकाई माना जावे तो, ख०, के तुल्य मापयंत्र के, भाग, सैकड़े होंगें, तथा, ख०, को ही एकाई मानें, तो हरएक, ख०, का भाग दशमांश होगा, यथा, ख०, एक फुट सूचित करे, तो, क०, ५ फुट सूचित करेगी और, ख०, का हरएक भाग एक फुट का दशमांश सूचित करेगा ॥

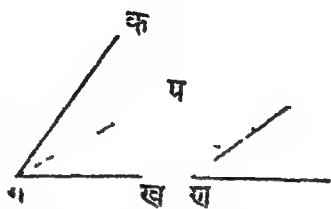
६ कोण, और उन्हीं की माप,—कोण, दो रेखाओं के, जो एक दूसरे से मिलती है बीच का अन्तर होता है, यथा, क ग, और ख ग, रेखा, ग कोण बनाती है, और अब, क ग, रेखा, ख ग, पर क ग ख, वा ख ग क, कोण ने झुकी कही जावेगी, वा, ख ग, रेखा पर, क ग, का झुकाव, क ग ख, वा ख ग क, कोण



कहा जावेगा, जिस में कोण पर का अक्षर, ग, और दोनों अक्षरों के बीच में बोला जाता है, कोण सूचित करने में बहुधा \angle यह चिन्ह लिखते हैं, यथा, क ग ख कोण, इसके स्थान में, \angle क ग ख, लिख सकते हैं, तथा कोई भूल न पड़ती होवे तो केवल, ग, कोण, वा \angle ग, ही लिखेंगे, दो कोण एक दूसरे से ठीक २ मिल जावें, तो वे समान होंगे, यथा \angle ज, \angle ग के तुल्य है वा नहीं, यह जानने के लिये, जो रेखा \angle ज, बनाती है उन्हें, जो रेखा \angle ग बनाती है, उन्हीं के ऊपर इस रीति से रखेंगे कि, ज, बिन्दु, ग, पर होवे और ज छ,

रेखा, ग ख, रेखा को आच्छादित करे, अब, ज च, ग क को आच्छादित करेगी तो, कोण तुल्य होंगे, पर, ज च, ग क, के बाहर पड़ेगी तो, \angle ज, \angle ग, से बड़ा होगा, तथा ज च, ग क के भीतर ही पड़े तो, \angle

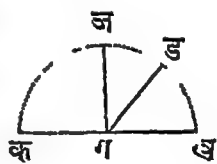
ज, \angle ग से छोटा होगा, यह भी शीघ्र ही निश्चित होजायगा, कि जो रेखा कोणों को बनाती है, -उन्हे की लंबाई से, कोणों



का आकार कुछ सम्बन्ध नहीं रखता, क्योंकि, कोण को बिना बदले, रेखाओं को चाहे जितना बढ़ा, वा घटा लो, कोण से कुछ काम नहीं \angle क ग ख को पूरा करने में, \angle ग देवेर आवे, तो \angle ग से \angle क ग ख, दूना होगा, तथा, ग प, रेखा \angle क ग ख, के दो समान भाग करे तो, ग प, को कोण की सम दो भागकारक रेखा कहेंगे, और \angle प ग ख, को, ग प पर लौट लेवे तो, ख ग, ठीकर, ग क, पर पड़ेगी ॥

क ग्व, रेखा से मिली, ग ड, रेखा स्पष्ट है, कि बाये की अपेक्षा दाहिनी ओर को अधिक भुकी है, अर्थात् \angle ख ग ड,

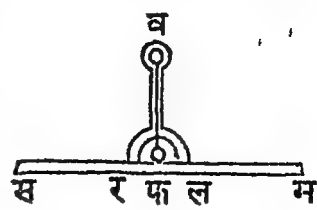
से \angle ड ग क, बड़ा है, परंतु, गज, ऐसे खैची जावे, कि वह दो में से, एक भी ओर को न भुकी होवे, और इसी से \angle क ग ज = \angle ज ग ख बनावे, तो इन कोणों से जात्य, वा



समकोण कहेंगे, ग ज रेखा, क ग्व पर लंब कहावेगी, तथा, ख ग ड, कोण, न्यून कहा जायगा, क्योंकि वह समकोण से छोटा है, और, ड ग क कोण, अधिक कोण कहावेगा, क्योंकि वह समकोण से बड़ा है ॥

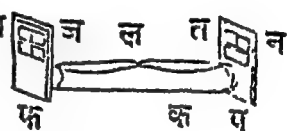
१० दृष्टान्त और व्यावहारिक प्रयोग— रेखा, अर्थात् डोरी

सावल बांधकर स्थिर, वा समभूमि-
जल के ऊपर लटकाई जावे, तो वह
रेखा जलपृष्ठ पर लंब होवेगी, इसी
हेतु से, सावल का समस्थ नाम
यंच (प्रमेटलेवल) बनाया जाता है,

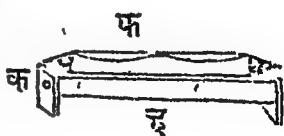


यथा, व फ सावल रेखा, काष्ठ पर कड़ी सरल रेखा पर ठीक २
लंब होवे, तो सरल रेखा समस्थ होवेगी,

पत्थर, और, काष्ठ, एकसे रखने में, कर्मकार जन्म मद्य
समस्थ (स्पिरिट लेवल) से भी काम करते हैं, यह यंच,
जत, एक काच की नली का होता है, जो
प्रायः, मद्य के सार से भरी होती है, म
और, फ ल प, चाखटा, वा टेकन, पर
रक्खी होती है, म और न, सिरो पर

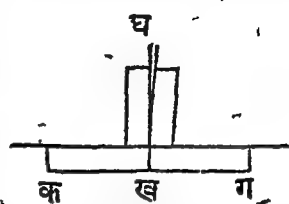


दो २ संधि एक दूसरे पर लंबरूप होती है, इस यंच को
काम में लाने के अर्थ, कोई से एक सिरे को लंबा वा नीचा
किया चाहिये, जिस से नली के भीतर का वायु का बुलबुला, ठीक २
बीच में, ल, चिन्ह पर आजावे, अब
नली, समस्थ होवेगी, और, प फ, समस्थ
रेखा है, न सन्धि के केन्द्र पर नेच
रखदार, दूसरे के केन्द्र में होकर देखने



से समस्थ रेखा जो चाहो जहाँ तक बढ़ालो, कभी २ दृष्टि
छिद्र, क, मद्य नली के नीचे किया जाता है; जैसा दूसरी
आकृति में है,

गुनिया नाम यंच काष्ठ की एक दूसरे पर लंबरूप से दो शलाकाओं को जोड़ने से बनता है, जब कोई कर्मकार गुनियां को सुधारा चाहता है वह, क ख डण्डी को, एक तख्ते की धार पर रखकर गुनियां की धार के लगा, ख घ, रेखा खेंचता है, फिर यंच को लौटकर उसी धार के लगा, दूसरी रेखा खेंचता है, अब जो दोनों रेखा मिलजावें, तो उसे निश्चय होगा, कि यह गुनियां ठीक है, और न मिलेंगी, तो वह देखेगा कि इसे ठाक करने के लिये धार को किधर से सुधारा चाहिये ॥

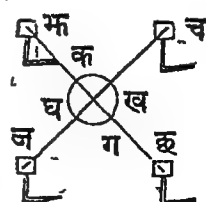


क ख ग, चिकोणाकार काष्ठ का यंच जिसकी क ख, ख ग रेखा एक दूसरे पर लंब है कागज पर लंब रेखा खेंचने में बड़े काम आता है इसके मध्य में एक छिद्र भी होता है जिसके हेतु चिचकार, इसे सुलभता से हटा सकते हैं ॥



स्वस्तिक बंश एक सीधा यंच होता है जिस से, जरीब डालनेवाले एक दूसरे पर लंबरूप रेखा, भूमि पर खेंचते हैं वह क ख ग घ, गोल काष्ठ का बनता है

जिसका व्यास प्रायः छह इंच का, और जो बीच से, क ग, ख घ, एक दूसरे पर लंबरूप दो रेखाओं में चिरा होता है, यह काष्ठ की गोल पट्टी एक नोकादार बांस पर रखी जाती है, जिसके हेतु जरीब-



वाले, इसे भूमि में डाल सकते हैं, इस यंच का प्रयोग जानने के अर्थ एक दृष्टान्त लें, यथा, च और ज दोनों चिन्हां के योग की च ज, रेखा पर, भू रेखा लंबरूप डालनी है,

अब प्रथम, च ज पर झगडा रखने के अर्थ घ ख, सन्धि की सीध में, दृष्टि को पहिले तो, ज, की ओर फिर च, की ओर, लगाकर यंच को हटाओ, जब लग कि संधि दोनों चिन्हों की सीध में न आजावे, फिर क ग संधि की सीध में दृष्टि लगाओ, और दूसरे मनुष्य से दृष्टि की रेखा में झ और, छचिन्ह करादो तो च ज, पर, झ छ लंब होवेगी ॥

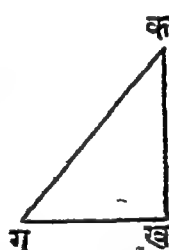
११ गुरु० यहां वने हुए कोणों के नाम लो,



विद्यार्थी १ समकोण, २ अधिककोण, ३ न्यून कोण है ॥

गुरु० क ख ग, त्रिकोण में कितने कोण है ?

वि० उसमें तीन कोण है और इसी से उसका नाम त्रिकोण है ॥

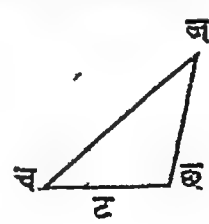


गुरु० परंतु इस विशेष आकृति के त्रिकोण से, समकोण त्रिभुज कहते हैं उसका क्या हेतु है ?

वि० क्योंकि इसका, ख, पर का एक कोण समकोण है ॥

गुरु० च छ ज, त्रिभुज अधिककोण त्रिभुज क्यों कहाता है ॥

वि० क्योंकि उसका, छ पर का एक कोण अधिक कोण है ॥



गुरु० ट ठ ड, त्रिभुज न्यूनकोण त्रिभुज है, यह नाम इसका कब होसकता है ?

वि० जब सब कोण, न्यूनकोण होवें ॥

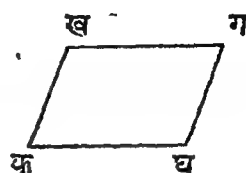


गुरु० इस पिछली आकृति में कौनसी भुजा समान जानी जाती है ?

वि० सब ही भुजा दूसरे के समान देख पड़ती है ॥

गु० ऐसा होता है तब यह चिभुज समचिवाहु कहाता है और जबकेवल दोही भुजा समान होती है, तब उसे समद्विवाहु कहते हैं,

पुन गु० इस समानान्तरबाहु मे कौनसी भुजा समानान्तरखिंची है?



वि० एक दूसरे की सामने की भुजा समानान्तर है, अर्थात्, क ख, ग घ, के और ख ग, क घ के समानान्तर हैं ॥

गु० जो तुमने अभी कहा है, यही समानान्तरबाहु का लक्षण वा परिभाषा है अच्छा कहो तुम्हारी पट्टी का कैसा आकार है ?

वि० इसका आकार समानान्तरबाहु है ॥

गु० ठीक है, परंतु एक भुजा दूसरी पर लंब है, इसलिये इसे समकोण चतुर्भुज, वा आयत भी कहते हैं, यथा क ख ग घ,

समकोण चतुर्भुज है, जिसकी सामने

की भुजा समानान्तर ही केवल नहीं हैं

किन्तु पास की भुजाओं से बने कोण

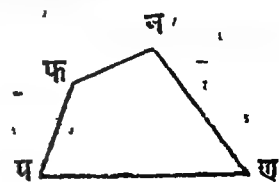
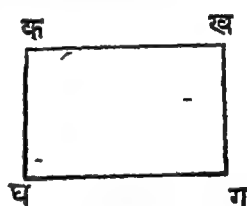
भी, यथा \angle क, समकोण है समकोण

चतुर्भुज की लंबाई, चौड़ाई तुल्य

होवे, अर्थात्, घ ग = घ क होवे, तो उसे बर्गजैच, वा बर्ग कहेंगे, इसी से समकोण समबाहु भी कहते हैं ॥

पुन गुरु० प फ न ग, चतुर्भुज को विषम चतुर्भुज कहते हैं, इसकी भुजाओं के मार्ग के विषय मे तुम क्या कहोगे ?

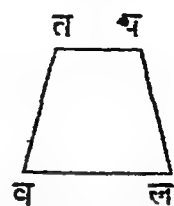
वि० इसकी कोई भी भुजा एक दूसरे के समानान्तर नहीं है ॥



गु० इस क्षेत्र को समलंब चतुर्भुज कहते हैं इसे में पहिले क्षेत्र से क्या विशेष है ?

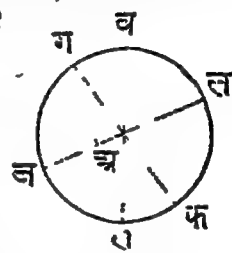
वि० वल भुजा त प के समानान्तर है ॥

गु० (डोरे से एक वृत्त बनाकर)



यह वृत्त तुमने बनते हुए देखलिया, कहे। अब अ केन्द्र की अपेक्षा वल फणजग परिधि किस प्रकार से स्थित है ?

वि० परिधि का हर एक बिन्दु केन्द्र से समान दूर होगा, अर्थात् अ व अ ल अ फ अ ग इत्यादि सब एक दूसरे के तुल्य होंगे ॥



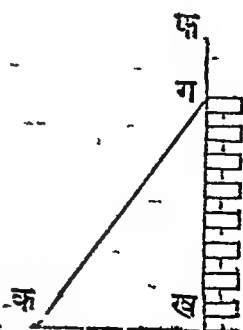
गु०, केन्द्र से परिधि तक खिंची अ व रेखा चिज्या वा व्यासार्द्ध और केन्द्र में होकर परिधि तक, खिंची वा अ ग रेखा व्यास कहाती है अब कहे चिज्या की अपेक्षा व्यास की क्या लम्बाई है ?

वि० चिज्या से व्यास दूना होता है क्योंकि ज ल, व्यास, अ ज, अ ल, दो चिज्याओं का बना है ॥

प्रश्न और उन्हें के करने का प्रकार ॥

१ ख ग, भीति की उंचाई २० फुट है, कहे उस से १५ फुट दूर रखो हुई सिड्डी की क्या उंचाई होवेगी, जो उसकी चौटी तक पहुंचती है ?

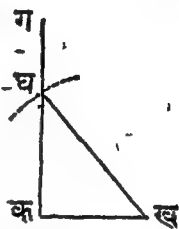
यहां ८ प्रक० से समभाग की माप पर, क ख = १५ लेकर त्रिकोणाकार गुनियां से, क ख, पर, ख फ, लम्ब डालो, और उसी समभाग की माप पर ख ग = २० लेकर क ग, को जोड़ दो,



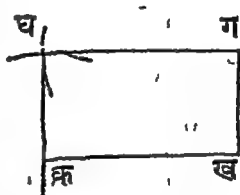
अब इस दूरी को उसी माप से मापने से आकांचित सिद्धी की लम्बाई = २४ फुट आवेगी ॥

२, क ख, क ग दो सड़कें एक दूसरी पर लम्ब है और क, से १५० और १८० गज पर क्रम से ख और घ, स्थानों पर दो घर है कहो घ, से सीधे, ख को जाने में कितना फरक बचेगा? उत्तर ६६ गज ॥

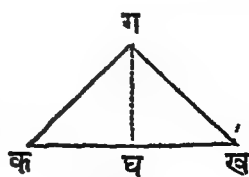
३, ३० फुट लम्बे और २० फुट चौड़े घर का डौल काढ़ दो, और क, से ग, तक खिचे कर्णपथ की लम्बाई निश्चित करो ॥



समभाग की माप से क ख, = ३० लेकर चिकोणाकार गुनियां से क ख, पर, ख ग, क घ लम्ब डालो, और उसी माप से ख ग, क घ, हर एक २० के तुल्य लेलो और, ग घ, को जोड़ दो अब क ख ग घ आकांचित आकृति होवेगी और क से ग, तक कम्पास रखकर उसी माप से देखने से आकांचित कर्णपथ की दूरी = ४२ के लगभग आवेगी ॥

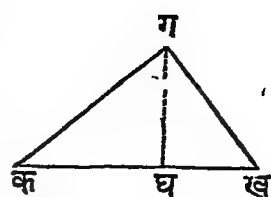


४, जरीब, और स्वास्तिक वंश से, क ख ग, एक चिकोणाकृति क्षेत्र मापने में, क से, घ तक दूरी = ९ जरीब, और वहां से, ग घ, रेखा ग, सिरे तक खैची वह क ख पर लम्ब है, और उसकी लम्बाई = ६ जरीब, तथा, घ ख = ५ जरीब निश्चित हुई, अब क्षेत्र का रूप और क ग, ख ग भुजाओं की लम्बाई निश्चित करो ॥



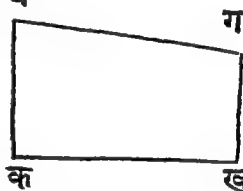
उत्तर क ग = ६.२ और ख ग = ७.८ जरीब

५. क ख ग, एक बंगले की छत की आकृति है, जिसकी लम्बरूप उंचाई, ग घ, = ८ फुट और छत के आधार का आधा बिस्तार, क घ = ८.५ फुट होवे तो,



ग. क कड़ी कितनी लम्बी होवेगी ? — उत्तर ११.६ फुट ॥

६ ग, और घ, एक दूसरे से अगम्य दो स्थानों का अन्तर जानने के लिये मैंने घ क = ६ गज मापकर उस पर लम्बरूप, क ख रेखा में चलकर, ग, स्थान के सामने से ख, चिन्ह पर एक बास रक्खा जो क ख पर ख ग, लम्ब बनाता है और फिर क ख = ६ गज ख ग घ = ४ गज निश्चित हुई कहो ग, घ, के बीच का क्या अंतर होगा ?



सममाप पर से क ख, = ६ लेकर उस पर क घ, ख ग, लम्ब डालकर उसी माप से क घ = ६ और ख ग = ४ लेलो, और घ ग, जोड़कर उसे उसी माप पर मापने से आकांचित दूरी = ६२. फुट आवेगी ॥

७ मैं एक सरल रेखा में ३० गज चलकर बायें को उस पर लम्ब दिशा में फिरकर ६० गज तक चला पीछे दाहिने को उस पर लम्ब मार्ग में लौटा, और उसमें ५० गज बढ़कर, सीधी रेखा में पूर्वस्थान को जहां से आदि में चला था, लौट आया कहे कितनी दूर की सब सैर की ?

उत्तर २४० गज ॥

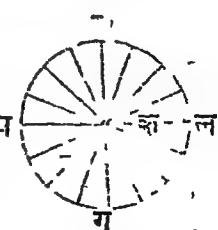
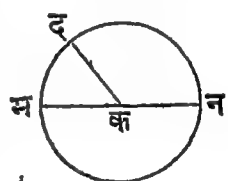
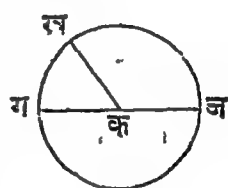
१२ हर एक व्यास, वृत्त के दो समान भाग करता है क्योंकि, व रा, पर, व ग ज रा को लौट दें तो, व ग ज रा धनुष, ठीक २ व ल फ रा धनुष को आच्छादित करलेवेगा, क्योंकि इन

धनुषो मे हर एक बिन्दु अ, केन्द्र से तुल्य दूरी पर है, इसी से, व ग ज ण, अर्द्धवृत्त, वा वृत्तार्द्ध कहाता है ॥ प्रक. ० की आकृति देखो ॥

१३ जिन्हे का चिज्या समान है वे वृत्त तुल्य होंगे, और तुल्य धनुष केन्द्र पर समान कोण बनावेगे,

क्योंकि ख ग ज, वृत्त को, ठ म न, वृत्त पर ऐसे रखें कि एक का क केन्द्र दूसरे के क, केन्द्र पर होवे ॥

और एक का व्यास, ग ज दूसरे के म न, पर होवे, तो क्योंकि वृत्तों की चिज्या समान है, इसलिये परिधि एक दूसरे से ठीक २ मिल जावेगी, तथा, ख ग, द म, समान चाप भी एक रूप होजावेगी, इसी से, क ख, रेखा. क द, पर ५ड़ेगी और इस रीति से $\angle खकग = \angle दकम$, तथा, ख, ग, और, द, म, के योग की रेखा भी मिल जावेगी, यहा क ख ग संपूर्ण खण्ड को वृत्त खण्ड कहते हैं ॥

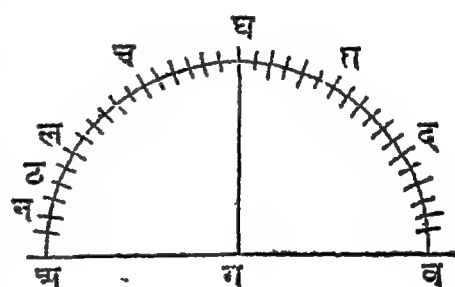
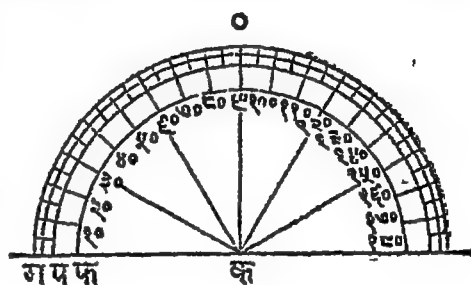


ख ल ग व, वृत्त की परिधि के कई एक समान खण्ड दिये जावे तो इन खण्डों के बिन्दु और वृत्त केन्द्र के योग की निकटवर्ती रेखाओं का, एक का दूसरी पर भुकाव एक ही होवेगा, क्योंकि, पूर्वोक्त रीति से, इन्हे मे से हर एक वृत्तखण्ड एक दूसरे के समान होगा, और मिलाने से एक रूप होजावेगा, इस

यह बात पाई जाती है, कि तुल्य धनुष तुल्य ही कोण घेरते

हैं, तथा तुल्यकोण भी तुल्य ही धनुष घेरेंगे ऐसा बिलोम भी ठीक है ॥

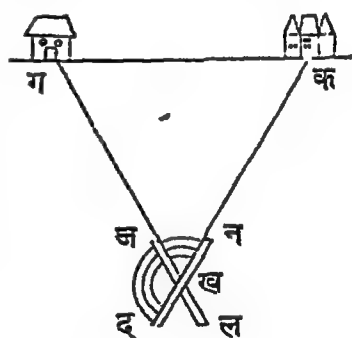
वृत्त की परिधि के ३६० समान भाग लिये जावें तो इन्हें मे से हर एक भाग अंश कहावेगा और दो पास के भाग चिन्ह और वृत्त के क केन्द्र के योग्य की रेखाओं के अन्तर्गत कोण, १ अंश, वा 1° का होगा यथा, इन भागों में से ३० लेने से \angle फ क ३०, ३० अंश, वा 30° का कोण होगा और यह भी सहज ही जाना जाता है, कि इस रीति से बना कोण चाप के प्रथम भाग के योग की रेखा से बने कोण से ३० गुणा होवेगा, तथा क०, रेखा, म क, पर लंब है इसलिये म क० कोण समकोण होगा, और म०, चाप वृत्त पाद होवेगी, इसी से उस में 360°



का $\frac{1}{2}$, वा 180° होंगे, ऐसे ही अर्द्धवृत्त में 360° का $\frac{1}{2}$, वा 180° होंगे जो २ समकोण के समान है, अब एक अंश के ६० तुल्य भाग हों, तो उन्हे में से, हर एक भाग, कला कहावेगा, तथा एक कला के ६० समान भाग हों तो उन्हीं में से हर एक, बिकला कहावेगा, इन्हीं के लिखने का यह प्रकार है, यथा, ३६ अंश, १४ कला, २५ बिकला, को $36^\circ 14' 25''$, ऐसे स्वरूप से लिखेंगे, जिस यंत्र का यह वर्णन किया है उसका नाम, कोणग्रह है जो बहुधा पितल का बनता है

और, एक दूसरे पर नियत भुकाव की रेखाओं के खेंचने में बड़े ही काम आता है, परन्तु पाठशालाओं में सिखाने के अर्थ प्राय, छह इंच की चिज्या के कागज के चक्र का बनाया चाहिये, अब उदाहरण के लिये, ग बिन्दु से, अ ग, के साथ 60° की चाप बनावे ऐसी एक रेखा खेंचने की वाछा करलो, और अब कोणग्रह के क, केन्द्र को ग, दिये चिन्ह पर तथा, क म, धार को ग अ रेखा पर रखकर यंच के 60° के चिन्ह के नीचे लगा हुआ च, चिन्ह करके, ग च, को, जोड़ दो, तो \angle अ ग च में 60° होवेगे ॥

अ घ वृत्तपाद के तीन समान भाग किये जावें तो हर एक अ ल ल च च घ भाग 60° का $\frac{1}{3}$ वा 30° का होवेगा तथा अ ल के अ न, न ट, ट ल, तीन समान भाग किये जावें तो इन्हीं में से हर एक 30° का $\frac{1}{3}$ वा 10° का होगा ऐसे ही और भी जानना ॥



१४ विद्यार्थी को पठने में इस स्थान पर कुछ २ वह रीति भी जान लेनी गुणदायक होगी, जिस से मापकजन ज्ञाण लेते हैं ॥

किसी बिन्दु से दो पदार्थों

तक खिंची रेखाओं से बने कोण के मापने में, बेधयंच, (थिआडिलैट) नाम यंच बड़े काम आता है इस यंच के बनाने और काम में लाने का हेतु सहज ही समझा जा सक्ता है यथा, द ज न एक वृत्त, कोणग्रहवत् अंशों में विभक्त है जिसके ख केन्द्र पर एक नली, वा दूर दृष्टि, द न एक कील पर फिरती है, अब पहले क, पदार्थ की ओर नली को फेरो और फिर

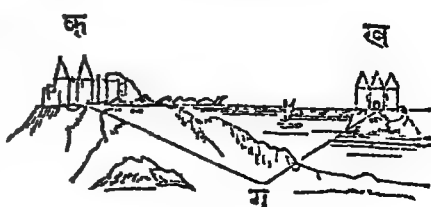
वहां से घुमाओ जब लग वह जल, रेखा में आजावे जो ग
दूसरे पदार्थ की सीध में है तो क ख, और ख ग रेखाओ से
बना कोण ज न, चाप के अंशों की संख्या से मापा वा जाना
जायगा ॥

प्रश्न और उन्हीं का प्रकार ॥

१ खस्थान से बिना मापे क, की दूरी जानने के लिये
एक मापकजन ने, \angle क ख ग = 80° निश्चित किया और
फिर ख ग दूरी = ३०० गज मापकर वेधयंत्र को ग पर
रक्खा और \angle ख ग क = 90° निश्चित किया कहे वह दूरी
उसने कितनी निश्चित की ?

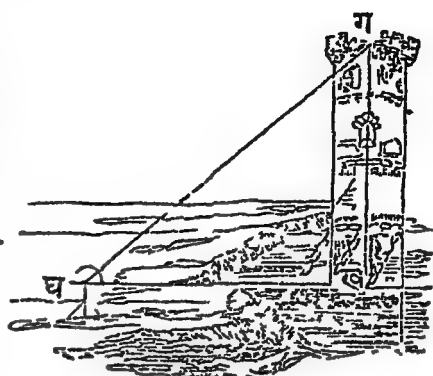
यहां ८ प्रक० से समभाग की माप की रीति से ख ग =
३०० लेकर कोणग्रह वा वक्ष्यमाण ज्यामाप से \angle क ख ग = 80°
बनाती हुई ख क रेखा खैचो तथा \angle क ग ख = 90° बनाती
हुई ग क रेखा खैचो तो ये दोनो रेखा एक क बिन्दु पर जाकर
कटेंगी अब कंपास से क ख को लेकर समभाग की माप पर देखने
से उस माप की इस कंपास के अन्तर्गत एकाइयों की संख्या,
आकांक्षित रेखा के गजों की संख्या ३०० गज होगी ॥

२. क और ख एक दूसरे से
अगम्य दो वुर्जों की दूरी
लाना चाहिये यहां वेधयंत्र
से, \angle ग = 990° लेकर क ग
= ३२ गज मापलो, और क पर
उसी यंत्र से \angle क = 30° जो,



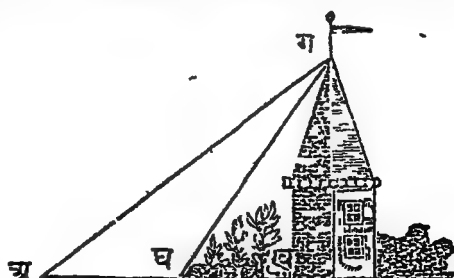
ख बुर्ज ग, पर खड़े भारछे से बनता है लेलो तो क ख
 $= 84$ गज पूर्व राति से आजावेगी ॥

३ ख ग बुर्जकी उचाई
 जानने को एक मापक ने बुर्ज
 की ख जड़ से घ ख समभूमि
 रेखा 800 फुट मापी और फिर
 घ पर बेधयच रखकर न घ
 ख कोण $= 80^\circ$ का लिया
 जो कि बुर्ज की चोटी ख घ
 समभूमि से बना बनती है कहे बुर्ज की ख ग उचाई क्या थी ?



समभाग की माप से ख घ $= 800$ लेकर कोणग्रह से \angle
 घ $= 80^\circ$ बनाती हुई घ ग रेखा खेंचलो और गुनियां से
 (प्रक्र० १०) घ ख पर ख ग तंब डाललो तो ये रेखा ग बिन्दु
 पर जामिलेगी अब कंपास से ख ग उचाई लेकर समभाग
 की माप पर देखो तो कंपास के बीच की माप की एकाइयों
 की संख्या बुर्ज की उचाई की फुट संख्या $= 834$ फुट के
 लग भग आवेगी ॥

४ एक ख, ग, शिखर की उचाई जानने को जिसकी
 ख, जड़ अगम्य है एक
 मापक ने अ घ, आधार
 रेखा $= 66$ फु० मापकर
 \angle ग घ ख $= 92^\circ$ और
 \angle ग अ ख $= 20^\circ$ लिये
 कहे शिखर का, ख ग
 उचाई क्या थी ?



समभाग की माप से अ घ = ७६ ले लो, और कोण ग्रह से \angle घ = 42° बनाती हुई घ ग, और \angle अ = 29° बनाती हुई अ ग, रेखा खैच लो; अब ग, बिंदु जहां कि ये दोनों रेखा मिलती हैं शिखर की चोटी, रूप होवेगा; इस ग, से गुनियां लेकर अ ख, पर, ख ग लम्ब डाल लो, और समभाग की माप से, ख ग को मापो तो उसके तुल्य उस माप की एकाइयों की संख्या आकांक्षित उचाई की फुट संख्या = ६४ होवेगी ॥

५ क ख पहाड़ पर स्थित एक ख ग, शिखर की उचाई जानने को, एक मा-

पक ने उली रेखा मे,

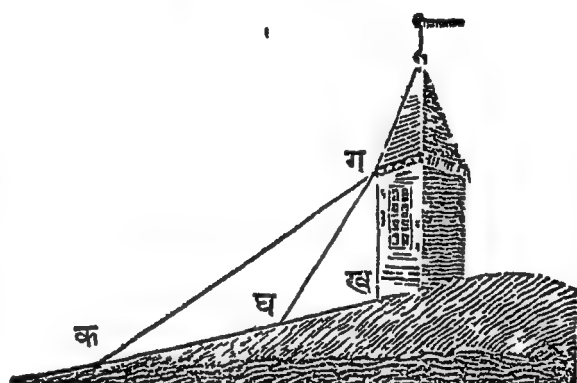
ख घ = ५० फुट;

और, घ क = ७५

फुट, मापकर \angle ग

घ ख = 41° और

\angle ग क ख = 28°



निश्चित किये कहो शिखर की क्या उचाई थी ?

क ख, कोई रेखा खैचकर, समभाग की माप से, ख घ = ५० और, घ क = ७५ ले लो, तथा कोणग्रह से \angle घ = 41° बनाती हुई, घ ग रेखा, और \angle क = 28° बनाती हुई, क ग, रेखा खैच लो तो ये दोनों रेखा, ग बिंदु पर जाकर मिलेंगी. अब, ख ग, को जोड़कर, उसे समभाग की माप पर मापने से, आकांक्षित उचाई = ७६ फुट आवेगी ॥

संज्ञाओं की व्याख्या, और प्रक्रिया ॥

१५. रेखागणित में, जिस प्रकार से रेखागणिताय, रेखा, घा क्षेप, बनाया जाता है, उसका जो विशेष रूप से विवरण

करे उसे परिभाषा कहते हैं यथा, समद्विबाहु त्रिभुज वह होता है जिसकी दो भुजा एक दूसरे के समान होती हैं; यह कहने से इस प्रकार के त्रिभुजों का लक्षण हो जाता है आकृति वा, क्षेत्र के लक्षण से, स्वरूप बन जाता है, और वे धर्म आजाते हैं, जिन्हें के हेतु सिद्धान्त, वा सिद्ध करने योग्य विशेष गुणों का उपपादन किया जाता है यथा समद्विबाहु त्रिभुज के लक्षण से, यह सिद्ध हो सक्ता है कि उसके समान भुजाओं के सन्मुख के कोण भी समान होंगे — क्षेत्रों में जो विशेष गुण सिद्ध करने को होते हैं उन्हें से, साध्यसूत्र, और प्रमेयोपपाद भी कहते हैं ॥

इन परिभाषाओं की स्पष्टता में, विशेषता और गौरव, कम पाया जाता है, पर जो विशेष गुण मान लिये जाते हैं, और जो सिद्ध करने को होते हैं, उन्हें का भेद ध्यान में बड़ी सावधानी से रखना चाहिये इस विषय में जहां तक काम पड़ता है उसमें कुछ यह नियम नहीं है, कि जिन क्षेत्रों का लक्षण कहते हैं, वे अवश्य बने ही होंगे किन्तु लक्षण के अनुरूप उन्हें का डोल ध्यान में आगया चाहिये, तथा यह भी अवश्य नहीं है, कि सिद्ध करने में एक आकृति वा क्षेत्र दूसरे पर रक्खा ही जावे, परंतु अपने मन में उसकी कही हुई रीति से, तथा समझलेना तो चाहिये ही, रेखागणितीय साध्य की प्रक्रिया की कारणभूत रीति उपरिस्थापन अर्थात्, एक आकृति को दूसरे पर रखने, की है यथा, १३, १६, इत्यादि प्रक० में है

साध्य का प्रतिलोम वा व्यस्त स्वरूप वह होता है, जिसमें उस साध्य की भाषा व्यस्त रीति से कही जाती है इस प्रकार के साध्य बहुधा, अन्यथानुभवसिद्धि अर्थात्, और सब कल्प-के व्यर्थ करने की रीति से सिद्ध होते हैं. बहुतेरे,

प्रकारों में साध्य का व्यस्त स्वरूप, वस्तुतः, अर्थात् हकीकत में उसी साध्य के प्रमाण में अन्तर्गत होता है जो कि हम देते हैं ॥

अशंक्य, वा स्वतः प्रकाशमान सत्य से स्वतस्सिद्ध कहते हैं अर्थात्, वह सत्य, जिसके वाचक शब्द के ज्ञानमात्र ही से, जो भट मान लिया जाता है, यथा, समानों में समान जोड़ने से योग भी समान हेगे, समानों में समान घटाने से शेष भी समान ही रहेगे. जो पदार्थ एक अन्य पदार्थ के तुल्य है, वे आपस में भी तुल्य होंगे इत्यादि ये स्वतस्सिद्ध सत्य के उदाहरण हैं. साध्यों के साधन प्रकार में जो प्रमाण स्वतस्सिद्ध सत्य, माने जावेगे उन्हों के जानने में विद्यार्थियों को कुछ कठिन नहीं होगा. यह भी मानना चाहिये, कि कोई २ साध्य ऐसे सीधे और सुबोध्य है, जैसे कि ये स्वतस्सिद्ध जिन्हों के आधीन वे साध्य माने जाते हैं यथा, समानान्तर रेखाओं के विशेष गुण, रेखागणित के प्रथम प्रक्रम में इस प्रकार के साध्य, रेखागणित की रीति की तर्क से अनुमान करने के योग्य यथार्थता को, विशेष दूषित, वा उल्लंघन करने के बिना भी स्वतस्सिद्धवत् माने जा सकते हैं ॥

साध्यप्रश्न वा वस्तुपपाद्य में, दिये पदार्थ वा नियमों से, जिन्हों को प्रश्न के अनुभूत पक्ष बोलते हैं, कुछ करना, वा, बनाना आकाक्षित होता है परंतु साध्य सूत्र और साध्य प्रश्न दोनों ही को सामान्य से साध्य कहते हैं, क्योंकि दोनों ही में कुछ न कुछ सिद्ध करने को होता है ॥

मूल सूत्र में — यह मान लिया जाता है, कि परिभाषाओं में जैसे कहा है ठीक २ वैसी ही आकृति का बनाना संभवित है, यथा, समानान्तर बाहु को यद्यपि ठीक २ नहीं बनावें

तथापि प्रकट है कि उस आकृति का परिभाषा के अनुरूप बनाना सम्भवित है ॥

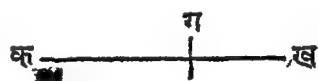
एक वा अनेक साध्यों से, जो फलित होता है उसे यहां अनुमान वा फल कहते हैं ॥

अनुभव वा पक्ष उरो कहते हैं जो किसी साध्य के उद्देश वा साधन में सत्य मान लिया जाता है ॥

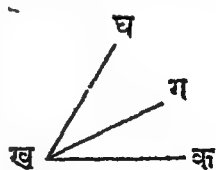
समता का चिन्ह वा संकेत, = है यथा क = ख, इस से सूचित होता है कि क, ख के समान है दो, वा, अधिक राशियों के जोड़ने में + यह चिन्ह अर्थात् युक्त वा धन लिखते है, यथा, क ख = क ग + ग ख, क्योंकि यहां संपूर्ण रेखा, क ख, दो भाग, क ग और ग ख की मिलकर बनी है

तथा, एक राशि में दूसरी को घटाने में, - चिन्ह हीन वा ऋण, लिखते है ॥

यथा, क ख - ख ग = क ग क्योंकि, क ख से ख ग निकाल डालने से, क ग, शेष रहजावेगी,



और कोणों के विषय में, \angle क ख घ = \angle क ख ग + \angle ग ख घ क्योंकि संपूर्ण कोण इन दो भागों का बना है; तथा \angle क ख घ - \angle ग ख घ = \angle क ख ग, क्योंकि संपूर्ण कोण से एक भाग ले डालने से केवल दूसरा भाग रहजावेगा ॥

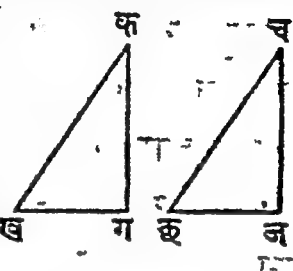


तथा \therefore यह संकेत, इसलिये, के अर्थ लिखा जाता : और जो संकेत बीज में आते हैं उन्हीं से रेखागणित उसी अर्थ का सूचित होना उचित है ॥

कोण त्रिकोण और समानान्तर रेखाओं के विषय
के साध्यों का विषय ॥

१६ साध्य सूच, क ख ग, और, च छ ज, त्रिभुज सर्वथा
तुल्य होंगे, जो, $\angle ख ग = \angle छ ज$, $\angle ख = \angle छ$
 $\angle क = \angle च$, और $\angle ख = \angle छ$

क्योंकि, ख ग क, को छ ज च, पर
ऐसे रखें कि, ख ग, भुज निज तुल्य;
छ ज भुज पर होवे, तो क्योंकि $\angle ख =$



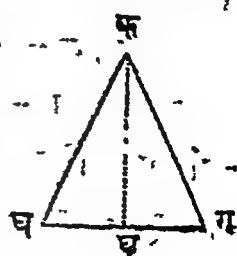
$\angle छ$, इसलिये, ख क, रेखा छ च, पर पड़ेगी, परंतु ख क = छ
च, इसी से, क, सिरा, च, पर पड़ेगा और इसी से, ख ग क,
त्रिकोण, छ ज च, से ठीक २ मिल जावेगा ॥

१७ साध्य — ख ग क, और छ ज च, त्रिभुज सर्वथा
समान होंगे, जो, $\angle ख ग = \angle छ ज$, $\angle ख = \angle छ$ और \angle
 $ग = \angle ज$ ॥

क्योंकि, ख ग क, को छ ज च, पर ऐसे रखें कि ख ग,
भुज निज तुल्य छ ज भुज पर होवे तो क्योंकि $\angle ख =$
 $\angle छ$, इस से, ख क भुज, छ च, पर पड़ेगी; तथा $\angle ग =$
 $\angle ज$ इस से, ग क, रेखा, ज च पर पड़ेगी, अर्थात् ख ग क
त्रिभुज, छ ज च से ठीक २ मिल जावेगा ॥

१८ साध्य — क ख ग, समद्विबाहु त्रिभुज में, जहां क ख =
क ग, है तुल्य भुजाओं के सम्मुख के कोण समान होंगे,
अर्थात्, $\angle ख = \angle ग$

क्योंकि $\angle क$ को सम दो भाग कारक
क घ रेखा मानलो: अब, क घ ख, त्रिभुज
को, क घ, रेखा पर लौट लो; तो, क्योंकि
 $\angle घ क ख = \angle घ क ग$ इसलिये, क ख,



क ग रेखा पर पड़ेगी, तथा क ख = क ग इसी से, ख, बिन्दु ग, पर पड़ेगा और क घ ख बिभुज ठीक २ क घ ग, से मिल जावेगा, और इसी से, $\angle ख = \angle ग$ ॥

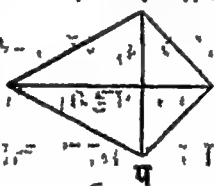
अनुमान — सिरे के क, कोण को आधार करनेवाली क घ, रेखा, आधार के भी दो समभाग करेगी, अर्थात् ख घ, = घ ग और यह ख ग, पर लंब भी होवेगी ॥

१६ साध्य — क ख ग, और च छ ज, बिभुज सर्वथा तुल्य होवेगे, जे

एक की तीनों भुजा

दूसरे की तीनों

भुजाओं से यथा-



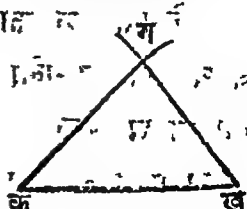
क्रम तुल्य होवे, अर्थात्, च छ = क ख, च ज = क ग, और छ ज = ख ग,

च छ ज, को क ख ग, के नीचे ऐसे रखो कि, च छ, क ख, से मिल जावे, और, ज, सिरा, प, बिन्दु पर होवे, ग, और प, बिन्दुओं को मिला दो अब क्योंकि क ग प, और ख ग प, बिभुज समद्विबाहु है इसलिये पूर्व साध्य से, $\angle क ग प = \angle क प ग$, और $\angle ख ग प = \angle ख प ग$ इन तुल्य कोणों को जोड़ने से, $\angle क ग प + \angle ख ग प = \angle क प ग + \angle ख प ग$, वा $\angle क ग ख = \angle क प ख$ इस से १६ प्रक० से यह आता है कि, क ख ग, और, क ख प, वा च छ ज बिभुज सर्वथा समान हैं, क्योंकि ग क = प क, ख ग = ख प और $\angle क ग ख = \angle क प ख$ ॥

उदाहरण — एक बिभुज बनाया जाहिये, जिसकी तीनों भुजा

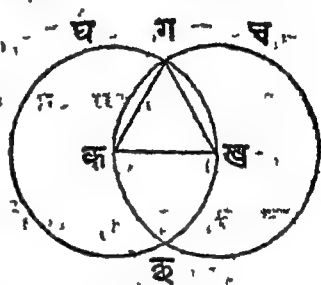
अर्थात्, क ख = २० क ग = २२ और

ख ग = १८ होवे ॥



यहां समभाग की माप से, क ख = २० लेकर, क, केन्द्र, और क ग = २२ चिज्या से एक वृत्त बनाओ, और ख, केन्द्र पर, ख ग = १८ चिज्या से दूसरा वृत्त पहले को, ग, बिन्दु में काटता हुआ खैचो, फिर क, और ग तथा ख, और ग, जोड़ दो तो, क ख ग आकांचित त्रिभुज बन जावेगा ॥

२०. साध्य — प्रश्न, वा, बस्तूप-
पादों = क ख दत्त रेखा पर क ख ग, एक
समचिवाहु बनाना चाहिये

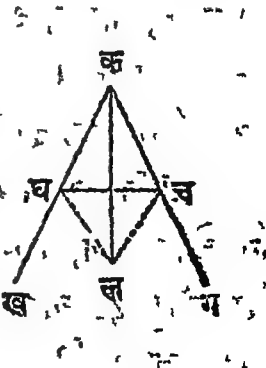


क, केन्द्र पर, क ख, चिज्या से, ख ग घ वृत्त बनाओ, तथा, ख, केन्द्र पर, उसी ख क चिज्या से, क ग च वृत्त भी बनाओ, जो पहले को, ग, बिन्दु पर काटे, अब, ग, को, क, और ख, से जोड़ दो तो, क ख ग, आकांचित समचिवाहु होगा ॥

क्योंकि यहां, ख ग घ वृत्त की चिज्या होने से, क ख = क ग, तथा, क ग च वृत्त की चिज्या होने से, ख ग = क ख, इसी से, क ख = ख ग, क्योंकि 'उन्हें' में से हर एक, क ख, के तुल्य है ॥

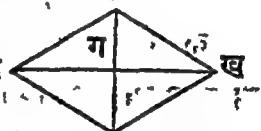
२१. साध्य — एक दिये, \angle ख क ग, के दो समभाग किया चाहिये ॥

क ख, रेखा में कोई, घ, बिन्दु लेकर, क घ = क ख, काट लो और, घ, च जोड़ कर उस पर (२० प्र०) च ल घ, समचिवाहु बना लो तथा, क, ल, को भी जोड़ दो, तो इसी, क ल, रेखा से \angle ख क ग के सम दो भाग हो जायेंगे ॥



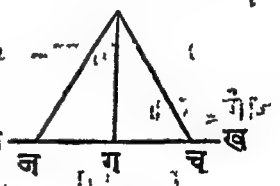
क्योंकि क ल घ, और, क ल च, त्रिभुज एकसे ही हैं; क्योंकि, क, घ = क च, और, क ल, दोनों, त्रिभुजों की रेखा एक ही है इसी से, १६ प्रक० से ये त्रिभुज सर्वथा तुल्य है, और $\angle घ क ल = \angle च क ल$, और, क ल घ, त्रिभुज, क ल, रेखा पर लौटाया जावे, तो वह, क च ल त्रिभुज को ठीक २ अर्च्छदित करे लेगा ॥

२२. साध्य—क ख, दी रेखा को, आध २ किया चाहिये। क ख, रेखा पर, (२० प्रक० से) क ल ल ख, क च ख, समचिवाहु बनाकर, क ख, रेखा को, ग, में काटती हुई, च ल, रेखा खैचलो तो क ग, = ग ख, अर्थात् दी रेखा के सम दो भाग हो जावेंगे, ॥



क्योंकि ठीक २ पूर्व साध्य की क्रिया से, स्पष्ट है, कि $\angle क ल च = \angle ख ल च$ और इसी से, क ल ग, ख ल ग त्रिभुजों में, क ल = ख ल, ल ग, उभयनिष्ठ, तथा $\angle क ल ग = \angle ख ल ग$ होंगे; इसलिये १६ प्रक० से ये त्रिभुज तुल्य है, और क ग, = ख ग ॥

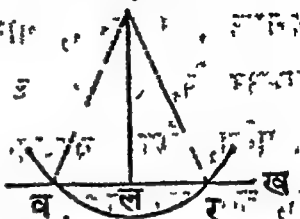
२३. साध्य—क ख, दी रेखा में, ग, दिये बिन्दु से, ग ल, लंब खैचना चाहिये, कंपास के कोई, अन्तर से, ग ज = ग च, करके, च ज पर (प्रक० २०) क च ल ज, सम त्रिभुज बनाओ, और, ल ग, को जोड़ दो तो, यही ल ग, रेखा अर्कोक्षित लंब होवेंगी ॥



क्योंकि ज ल ग, च ल ग, त्रिभुजों में ग ज = ग च, ज ल = च ल, और ग ल, उभयनिष्ठ है इस से, १६ प्रक० से ये त्रिभुज सट्टण है, और $\angle ल ग ज = \angle ल ग च$, अर्थात्, ल ग, क ख, लंबरूप है ॥

२४. साध्य—ग, दिये बिन्दु से, के ख, सरल रेखा पर, ग ल, लंब डालना चाहिये.

ग, केन्द्र पर, कंपासे के विशेष अन्तर, से के ख, को, व, और, रचिन्हों में काटता हुआ, एक वृत्त खिंचकर, व, और, र बिन्दुओं को ग, से जोड़ दो; और २१. प्रक० से, \angle व ग र को सम दो भाग करके ग ल, रेखा डाल लो, तो यही ग ल, रेखा आकांचित लंब होवेगी ॥



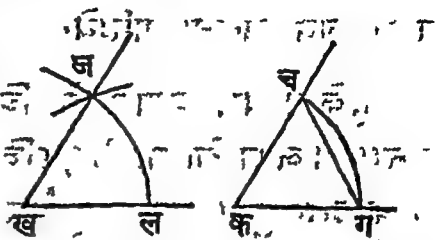
यथा, ग ल व, त्रिभुज, ग ल, रेखा पर लौट लिया जावे, तो यह ठीक २ ग र ल, त्रिभुज को ढांप लेगा, क्योंकि \angle ल ग व = \angle ल ग र, और ग व, = ग र, इसी से, \angle ग ल र = \angle ग ल व, अर्थात् ग ल, के ख, पर लंब है ॥

२५. साध्य—ल, बिन्दु से, के ख, रेखा, तक खिची छोटी से छोटी रेखा, ग ल, लंब के सिवाय और कोई नहीं हो सकती (२२. प्रक० की आकृति देखो) ॥

यथा, ल ग को बढ़ाकर, ग च = ल ग, करें लो, के ख, में कोई, के बिन्दु लेकर उस से, ल, और, च, को जोड़ दो, तो \angle के ग ल, \angle के ग च, समकोण होवेंगे, और अब, के ग च, त्रिभुज के ग, पर लौटा जावे, तो वह, के ग ल, को ठीक २ ढांप लेगा, और इसी से, के च = के ल. २. प्रक० से, के ल + के च, अर्थात्, = के ल, ल च, से अधिक है और इसलिये, ल ग, से, के ल, बड़ी है, के ख, में हर एक बिन्दु के लिये यही प्रक्रिया होगी एक, ग, को छोड़के ॥

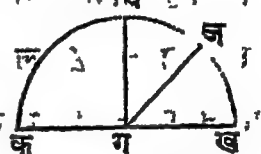
साध्य :- दिये \angle क के तुल्य \angle ख, बनाया चाहिये.

क, केन्द्र पर, परकार के कोई अन्तर से, ग च, चाप बनाकर, ख, केन्द्र, और उसी अन्तर से, ल ज, चाप भी बनालो, फिर परकार से ग च, को मापकर, ल केन्द्र पर उस अन्तर से, पहली चाप को, ज, पर काटती हुई एक और चाप खेचकर, ख और ज, को जोड़ दो, तो \angle ल ख ज = \angle ग क च.



क्योंकि, ख ल ज, और क ग च, त्रिभुज एकसे हैं; इसी से यह आता है कि \angle ख = \angle क ॥

साध्य :- एक रेखा से दूसरी के साथ, बने, निकट के, ज ग क, और ग ल ज ग ख, कोण मिलकर दो समकोण के तुल्य होंगे ॥



ग, केन्द्र पर, किसी चिज्या से, क च ज ख, अर्द्ध वृत्त बना लो, अब यह स्पष्ट है कि क ग ज, और ख ग ज, कोण मिलकर, 180° वा दूने 90° अर्थात् दो समकोण है ॥

प्रकारान्तर :- ग, बिन्दु से, क ख, पर ग च, लंब डाल लो, तो \angle च ग क + \angle च ग ख = दो समकोण, और \angle ज ग क = \angle च ग क + \angle च ग ज, इन समानों में \angle ज ग ख, जोड़ने से \angle ज ग क + \angle ज ग ख = \angle च ग क + \angle ज ग च + \angle ज ग ख, = \angle च ग क + \angle च ग ख = दो समकोण ॥

इस साध्य का प्रतिलोम भी ठीक है अर्थात् क ग, और रेखाओं के साथ, च ग, रेखा, क ग च, ख ग च कोणों

धार्तिक — ज ग क, कोण, ज ग ख, का पूरक कहाता है, और \angle ज ग च उसी की कोटि कहों जाती है ॥

इस साध्य के विषय के उदाहरण ॥

१. \angle ख ग ज = 80° , इसका पूरक \angle ज ग क क्या होगा?

उत्तर 180° : क्योंकि \angle ज ग क = $180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$

२. \angle ख ग ज = 35° इसकी कोटि ज ग च, क्या होगी?

उत्तर 95° ; क्योंकि \angle ज ग च = $180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$

३. समकोण का, 30° कौनसा भाग है? उत्तर 1 अंश

का योग, दो समकोण के तुल्य बनावे, तो, क ग, और ख ग, एक ही सरल रेखा में होंगी यथा, म ज, कोई रेखा में, किसी,

न बिन्दु से, \angle ज न ल = \angle ख ग च,

बनाती हुई, न ल रेखा खैच, तो, तो पूर्व,

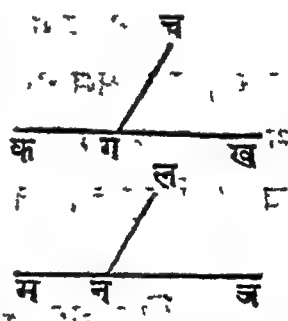
साध्य से, \angle म न ल + \angle ज न ल =

२ समकोण, $\therefore \angle$ म न ल + \angle ज न ल =

न ल = \angle क ग च + \angle ख ग च,

परंतु \angle ज न ल = \angle ख ग च इसलिये,

इन समानों को लेडाने से, \angle म न ल = \angle क ग च



अब, दूसरी आकृति को पहली पर ऐसे रखो कि, न, ग, पर होंगे, और, ज न, ख ग, पर तो न ल, ग च, पर, पड़ेगी: क्योंकि \angle ज न ल = \angle ख ग च, तथा, \angle 'म न ल' भी = \angle क ग च; इस से, न म, ग क, पर पड़ेगी और इसी से, क ग ख, म न ज सरल रेखा से मिल जावेगी अर्थात्, म क और ग ख, एक ही सरल रेखा में होंगी ॥

४. किसी वृत्त की परिधि के तुल्य, ६-भाग किये जावें तो हर एक उन में से कै अंश का होगा ?

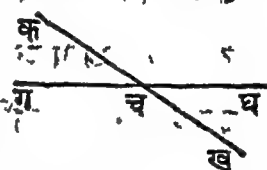
उत्तर ६०° क्योंकि ३६०° का ६ वां भाग = ६०° है

५. संपूर्ण गोल का, ४०° की चाप कौनसा भाग है ?

उत्तर १ अंश क्योंकि ४०°, ३६०° का ठीक १ अंश है.

२८. साध्य — क ख, ग घ, दो सरल रेखा आपस में कटे, तो सामने के कोण समान होंगे, अर्थात्,

\angle क च ग = \angle ख च घ, और \angle ग च ख = \angle क च घ.



क्योंकि, पूर्व साध्य से, \angle क च ग

+ \angle ग च ख = २ समकोण, तथा \angle घ च ख + \angle ग च ख भी = २ समकोण परंतु जो पदार्थ एक ही पदार्थ के तुल्य होते हैं, वे तुल्य होते हैं.

$\therefore \angle$ क च ग + \angle ग च ख = \angle घ च ख + \angle ग च ख, इन समानों में से \angle ग च ख, ले डालने से, \angle क च ग = \angle घ च ख, और इसी रीति से \angle ग च ख = \angle क च घ सिद्ध हो जावेगा ॥

अथ प्रयोग ॥

१. बिना उतरे नदी का, क ख, फांट निश्चिन करना चाहिये मरिंक को, नदी के पार के कोई, ख, पदार्थ के ठीक २ सामने क, स्थान पर खड़े

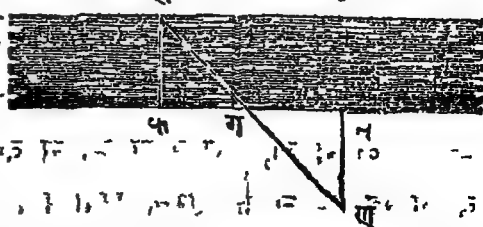
होकर, स्वस्तिक, अंश,

अथवा, बोधयत्र से, क ख,

पर, क म, लंब डालना चा-

हिये और क ग = ग म,

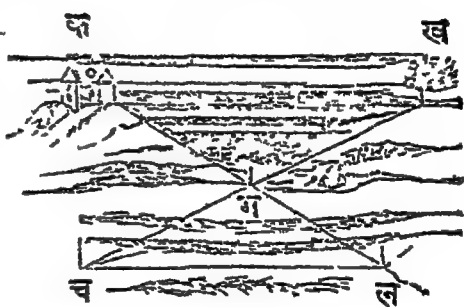
चनाकर, क म, पर, मणि, लंब डाले फिर, ग, पर, के भण्डे और



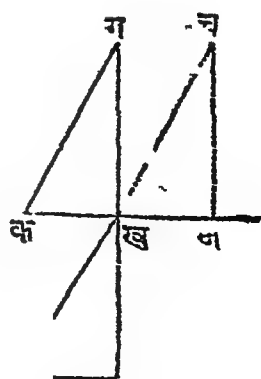
ख, पदार्थ की सीध में ग, पर एक झगड़ा खड़ा करे तो, म ग, रेखा को भूमि पर माप लेनेसे, नदी की क ख दूरी आजावेगी। क्योंकि ग म ग, और ग क ख, त्रिभुजों में, $\angle ग = \angle म$, $\angle न$ $\angle ग = \angle क$ ग ख, (पहिले साध्य से), और $\angle क = \angle ग$ । क्योंकि दोनों समकोण हैं, इसलिये, १७ प्रश्न० से ये त्रिभुज सर्वथा समान हैं और इसी से म ग = क ख ॥

२ एक दूसरे से अगम्य क, और ख, दो पदार्थों के बीच की दूरी निश्चित की चाहिये।

कोई, ग, स्थान लेकर ग ख, ग क, दूरियों को मापकर वर्द्धित, ख ग, में ग च = ख ग, और, वर्द्धित, क ग में, ग ल = क ग मापलो; अब, च ल, को मापने से, क, ख, के बीच की दूरी आजावेगी; क्योंकि ग ल च, और ग क ख, त्रिभुजों में, ग ल = ग क, ग च = ग ख और $\angle ल ग च = \angle क ग ख$; इसलिये १६ प्रश्न० से ये त्रिभुज एकसे ही हैं, और इसी से, च ल = क ख ॥



२६ साध्य — क ख ग, त्रिभुज का बाह्य कोण, ग ख च, सामने के भीतरे, क, वा, ग, हर एक से बड़ा है,

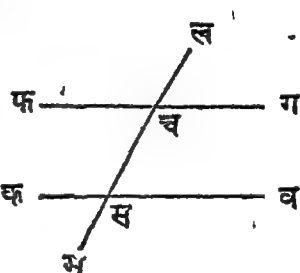


क्योंकि, क ख ग चिभुज को, क ज रेखा पर सरकावे कि क, कोण, ख, घर आजावे, तो प्रत्यक्ष है कि, ग, सिरा ख ग के दहिनी ओर किसी च, बिन्दु पर आजावेगा और इसी खे ख च, रेखा, ग ख ज, कोण के बीच में पड़ेगी, अर्थात्, च ख ज वा तुल्य, ग क ख से ग ख ज, कोण बड़ा होगा अब, ग ख भुजा को बढाने से इसी अनुमान के प्रसार से यह भी सिद्ध हो जावेगा, कि \angle ग से भी \angle ग ख ज, बड़ा है ॥

इस साध्य के सिद्ध होजाने से आगे का स्वतस्सिद्ध भी टूट होजाता है

यथा स्वतस्सिद्ध— ग क ख, कोण से \angle ग ख ज, अधिक होगा तो, क ग, और ख ग, रेखा क ज, भुजा के ऊपरी ओर किसी बिन्दु पर जाकर मिल आवेगी ॥

३०. साध्य — फ ग, और क व दो रेखा, ल म एक सरल रेखा के साथ समान कोण अर्थात् \angle फ च स, = \angle च स व, वा एक ही बात है \angle ल च ग = \angle च स व' बनावे तो समानान्तर होवेगी



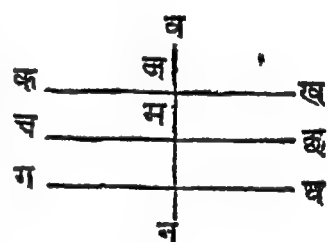
क्योंकि ये रेखा, ल म, के दहिनी ओर तो नहीं मिलेंगी, अन्यथा उधर को चिभुज बन जावेगा, और इसलिये पूर्व साध्य से बाहरा कोण, फ च स, च स व, के तुल्य की जगह उससे बड़ा होजावेगा तथा इसी हेतु से, वे रेखा, ल म के बायें को भी नहीं मिल सकती इसी से, फ ग, क व, रेखा हैं ॥

फ च स, और, च स व, एकान्तर कोण, कहते हैं; और, ग च ल, भीतरे, और सन्मुख, च स व, कोण का बाह्यार, वा बहिर्गत कोण कहाता है ॥

३१ साध्य—फ ग, क व, दो समानान्तर रेखाओं को ल म, रेखा काटे तो, एकान्तर कोण, फ च स, च स व, तथा बहिर्गत कोण ल च ग, और उसका सन्मुख भीतरा च स व कोण भी, समान होवेंगे (पूर्व की आकृति देखो) ॥

क्योंकि च स व से फ च स, कोण बड़ा होवे, तो ये रेखा, ल म की दाहिनी और मिलकर चिभुज बनावेंगी (२६ प्र० ० स्वत, ०) तथा, च स व, से, फ च स, छोटा होवे, तो वे रेखा ल म, के बायें को मिलेंगी इसी से, फ ग, और क व, रेखा, किसी और न मिलें, इसलिये \angle फ च स = \angle च स व, तथा \angle ल च ग = \angle च स व, अवश्य होने चाहियें ॥

३२ साध्य—क ख, और, ग घ, सरल रेखा, जो एक ही च छ रेखा के समानान्तर है, एक दूसरी के भी समानान्तर होवेंगी ॥

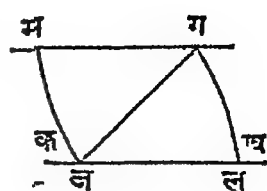


यथा, व न, रेखा क ख, च छ, और ग घ, को काटती है.

पर, क ख, च छ, समानान्तर हैं इस से (प्र० ३१) \angle व ज ख = \angle व म छ तथा, च छ, ग घ, भी समानान्तर है इस से, \angle व न घ, = \angle व म छ, इसलिये साम्य से, \angle व ज ख = \angle व न घ, इसी से, ३०. प्र० से क ख, ग घ, भी एक दूसरी के समानान्तर है ॥

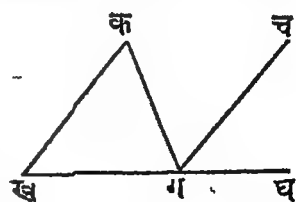
३३. साध्य—ग, दिये बिन्दु में होकर, क ख, के समान्तर, ग म, रेखा खेंची चाहिये ॥

ग, से क ख, तक एक, ग ज रेखा, खेचकर ग, बिन्दु से (प्र० ८) \angle ज ग म = \angle ग ज ल, बनाती हुई, ग म रेखा खिंचलो तो यह ३० प्र० से, क ख के समान्तर होवेगी ॥



व्यवहार में, समान्तर रेखा, १० प्र० में कही चिकोणाकृति गुनियां के द्वारा बड़ी सहजता से खिंचती हैं, यथा, (३० प्र० की आकृति में) क व रेखा से मिलाकर गुनिया की कोर, क ख, ऐसे रक्खो, कि क घ कोर, च दिये बिन्दु में होकर जावे, फिर, स ल, रेखा खिंचकर गुनियां को हटाले जाओ, जब ल ग, उसका कोण क, च, पर आजावे, फिर, च ग रेखा यंच की, क ख, कोर से मिलाकर खिंचलो तो, यह, क व, दी रेखा के समान्तर होवेगी समान्तर रेखा खिंचने की यह रीति, समान्तर सूत्र, (परेललरूलर) की, रीति से अधिक सीधी है, तथा शुद्धता और शीघ्रता में भी कुछ उस से कम नहीं है ॥

२४ साध्य — ख ग क, त्रिभुज का, क ग घ, बाहरा कोण, भीतरे सन्मुख, क, और, ख, कोणों के योग के तुल्य है, तथा त्रिभुज के तीनों कोणों का योग दो समकोण के समान होगा ॥



यथा क ख, के समान्तर ग च, खिंचलो तो ३१ प्र० से \angle च ग घ = \angle ख, और \angle च ग क = \angle क;

इन तुल्यों को जोड़ने से, \angle च ग घ + \angle च ग क = \angle ख + \angle क, अर्थात् \angle क ग घ = \angle ख + \angle क.

अब इन दोनों समानों में, \angle क ग ख, जोड़ दो, तो \angle क ग घ + \angle क ग ख = \angle ख + \angle क + \angle क ग ख; परंतु २० प्र० से, इस, साम्य का बाया पक्ष दो समकोण के तुल्य है, $\therefore \angle$ ख + \angle क + \angle क ग ख = दो समकोण; अथवा 180° ॥

उदाहरण और प्रयोग ॥

१ \angle क = 25° और \angle ख = 42° है, \angle क ग घ चाहिये.

यहां \angle क ग घ = $25^\circ + 42^\circ = 67^\circ$ ॥

२ \angle क ग घ बाहरा = 65° और \angle क = 36° ; \angle ख को निश्चित करो ॥

यहां \angle ख + \angle क = \angle क ग ख, अर्थात्, \angle ख + $36^\circ = 65^\circ$, दोनों ओर से 36° लेडालने से, \angle ख = 29° ॥

३ \angle ख = 46° , और \angle क = 78° ; शेष \angle क ग ख, चाहिये ॥

यहां $46^\circ + 78^\circ + \angle$ क ग ख = 180° . $\therefore \angle$ क ग ख = 56° ॥

४ एक त्रिभुज के आधार पर के कोण क्रम से 99° और 93° है सिरे का कोण चाहिये. — — — उत्त. 92° ॥

५ एक त्रिभुज के दो कोण, 90° और 70° हैं; शेष कोण क्या होगा ? — — — उत्त. 20° ॥

६ एक समकोण त्रिभुज के आधार पर का कोण 90° है, कहे सिरे का कोण क्या होगा ? — — — उत्त. 45° ॥

७. सिद्ध करो कि, समकोण त्रिभुज में, भुज, कोटि के सन्मुख न्यून कोण होते हैं. ॥

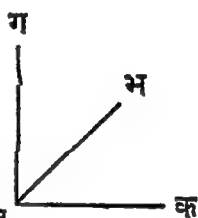
८. सिद्ध करो कि, समकोण त्रिभुज में, भुज-कोटि के सन्मुख कोणों का योग 90° होता है. ॥

६. सिद्ध करो कि, समकोण समद्विबाहु में हर एक न्यून कोण 45° का होता है ॥

१०. एक समद्विबाहु के सिरे का कोण 90° है, आधार पर के कोण क्या होंगे ? --- उत्त. 45° ॥

११ 45° का कोण बनाना

यहाँ, क ख, पर, ख ग, लंब डाल कर, ख भ रेखा से (प्र० २१) \angle क ख ग के सम दो भाग कर लो तो \angle क ख ग = 45° और इसी से \angle क ख भ = 45° का आधा = $22\frac{1}{2}^\circ$ और 45° के कोण ख के सम दो भाग करने से, $22\frac{1}{2}^\circ$ का कोण आवेगा इत्यादि ॥

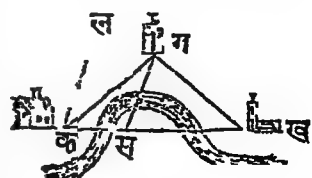


१२ 60° , 30° , 15° , के कोण बनाने चाहिये ॥

क ख ग, एक समद्विबाहु (२० प्र० की आकृ०) बनाओ, तो हर एक, क, ख, ग, कोण एक दूसरे के तुल्य होंगे; और इसी से \angle क = 60° की $\frac{1}{3} = 20^\circ$ अब, \angle क, के सम दो भाग करने से, 10° का कोण, और इसे आधा करने से, 5° का इत्यादि और भी आवेगे ॥

१३ क, ख, ग, तीन पदार्थों की एक दूसरे से दूरी ज्ञात है;

यथा, क ख = १२ मील, ख ग = ९ मील, और क ग = ८ मील, अब क, और, ख, की सीध में, एक, स, स्थान से, किसी मापक ने, ख स ग कोण = 60° पाया, ग पदार्थ की दूरी चाहिये. क ख ग, त्रिभुज बनाकर, क, से, क ल, रेखा, \angle ख क ल



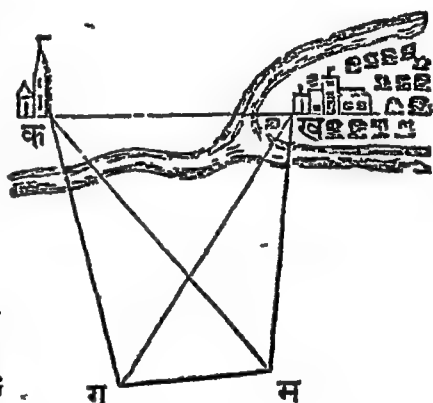
$= 60^\circ$ बनाती हुई खिंचलो, और, ग, से, क ल, के समान्तर म स, खिंचलो, तो $\angle ग स ख = \angle ख क ल = 60^\circ$ ॥

इसलिये स, वह स्थान है अब, स ग, को स्केल, अर्थात् माप, पर मापने से आकांक्षित दूरी $= 1.3$ मील आजावेगी ॥

१४ क, और, ख, दो अगम्य पदार्थों के बीच का अन्तर जानने को, मैंने एक, ग म, आधार रेखा $= 150$ गज माप कर, म, स्थान से, $\angle ग म क = 85^\circ$ और $\angle क म ख = 22 \frac{1}{2}^\circ$ देखे; फिर, ग, स्थान पर जाकर, $\angle ख ग म = 60^\circ$, और $\angle ख ग क = 85^\circ$ देखे;

कहो क और ख, पदार्थों के बीच में क्या दूरी थी ?

यहां समभाग की माप से, ग म $= 150$; लेकर म, से, म क, म ख, रेखा, क्रम से $\angle ग म क = 85^\circ$, और $\angle क म ख = 22 \frac{1}{2}^\circ$ बनाती हुई;



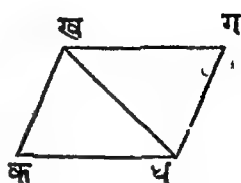
तथा, ग, से, ग क, ग ख, रेखा क्रम से $\angle ख ग म = 60^\circ$, और, $\angle ख ग क = 85^\circ$ बनाती हुई खिंचलो, तो म ख, ग ख, रेखा, ख, स्थान पर तथा म क, ग क, क, स्थान पर जा मिलेंगी; अब, क ख, को जोड़कर समभाग की माप पर मापने से आकांक्षित दूरी प्रायः $= 1.3$ गज आवेगी.

समान्तर बाहु तथा अन्य चतुर्भुजों के विषय के प्रमेय और उपपाद्य ॥

३५ साध्य — समान्तर बाहु की सामने की भुजा एक दूसरे के तुल्य होती है. तथा कर्ण उसे आधा २

करता है, और सामने के कोण भी एक दूसरे के तुल्य होते हैं ॥

यथा, क ख ग घ, एक समान्तर, बाहु है, इसकी ख ग, भुज, क घ के समान्तर है, इससे ३१ प्र० से, ग ख घ, और, क घ ख, एकान्तर कोण तुल्य है, इसी रीति से, ग घ ख और, क ख घ, एकान्तर कोण भी समान है।



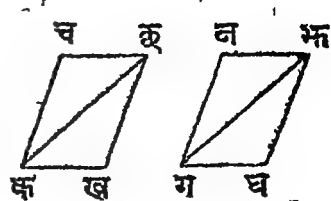
अब, ग ख घ, और क घ ख, दो त्रिभुजों में, ख घ भुज उभयनिष्ठ है, और $\angle ग ख घ = \angle क घ ख$, तथा $\angle ग घ ख = \angle क ख घ$ इसलिये, १७ प्र० से, ये त्रिभुज एक से हैं और इसी से, ख ग = क घ, ग घ = क ख, और $\angle ग = \angle क$ ॥

प्रतिलोम से — ख ग = क घ, और ग घ = क ख होवे तो, क ख ग घ, समान्तर बाहु होगा क्योंकि १६ प्र० से ख ग घ, क ख घ, त्रिभुज एक से होंगे, इसी से $\angle ग ख घ = \angle क घ ख$, इसलिये ३० प्र० से, ख ग, क घ, के समान्तर हैं, इसी रीति से ग घ, समान्तर, क ख, के होगी अर्थात्, क ख ग घ, समान्तर बाहु है ॥

३६ साध्य — क घ, और ख ग, दो समान, समान्तर रेखा हों, तो एक ही एक ओर के सिरो के योग की, क ख, और ग घ, रेखा भी, समान, समान्तर होंगी ॥

क्योंकि ग ख घ, क घ ख, त्रिभुजों में $\angle ग ख घ = \angle क घ ख$, ख ग = क घ, तथा ख घ उभयनिष्ठ है, इसलिये १६ प्र० से वे एक से हैं; इससे, क ख = ग घ इत्यादि होंगी ॥

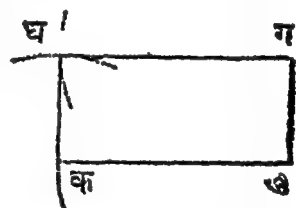
३७. साध्य - क ख = ग घ, ख छ = घ भ और \angle क ख छ = \angle ग घ भ होंगे, तो क ख छ च, और ग घ भ ज, समान्तर बाहु सर्वथा एकसे होंगे ॥



यथा, क ख छ, ग घ भ त्रिभुज (प्र० ३६) एकसे है; तथा, क च छ, ग न भ त्रिभुज भी एकसे हैं (प्र० ३५ और १६) ॥

अब, क ख छ च, को ग घ भ ज, पर ऐसे रखो कि क ख, ग घ से मिल जावे, तो ख छ, घ भ पर पड़ेगी, तथा, छ बिन्दु, भ, पर; और ऐसे, छ क च, त्रिभुज भ ग ज को ठीक २ ठक लेगा, अर्थात्, ये समान्तरबाहु एकसे हैं ॥

३८. साध्य - क ख ग घ, एक आयत बनाना चाहिये, जिसकी भुज, कोटि दी है; अर्थात्, क ख = ३६ और, ख ग = १८ ॥

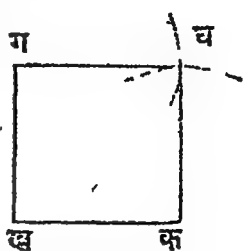


समभाग की माप से, क ख = ३६ लेकर, उस पर, ख ग लंब डालो और उसी माप से, ख ग = १८ लेकर, ग, केन्द्र और, क ख, त्रिज्या से, घ, चाप, खेंवो, तथा, क, केन्द्र और, ख ग, त्रिज्या से एक और चाप पहलो को, घ, पर काटता हुई खेंवो; और अब, क घ, न घ, रेखा बनालो, तो, क ख ग घ, आकाक्षित आयत होवेगा.

क्योंकि, ग घ = क ख, और, क घ = ख ग, इसमें ३५ प्र० से आता है कि, क ख ग घ, समान्तरबाहु होगा. परंतु \angle ख, समकोण है इसलिये वह जात्य आयत भी होवेगा ॥

अनुमान - आयत के सब कोण समकोण होने हैं ॥

३६ साध्य — क ख, एक दी रेखा पर एक वर्ग बनाना चाहिये क ख, पर, ख ग, लंब डाल कर, ख ग = क ख करलो, और, ग और क केन्द्रों पर क ख बिज्या से घ, पर एक दूसरे को काटती हुई चापें बनाकर, क घ, ग घ, रेखा खेंच लो, तो क ख ग घ, आकांक्षित वर्गजेव होगा ॥



क्योंकि निर्माण से, इस आकृति की सामने की भुजा समान है, इस से प्र० ३५ यह समान्तर ढाहु है; तथा, ख ग = क ख, और \angle ख = समकोण, इस से यह वर्ग भी होगा ॥

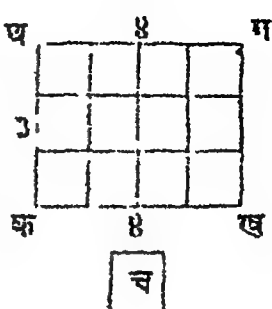
अनु० वर्ग, एक चतुर्भुज जेव होता है, जिसकी सब भुजा समान, और सब कोण समकोण होते हैं ॥

प्रयोग ॥

१. - वर्ग की एकाई — पृष्ठ, वा धरातल को, एक दूसरे से मिलाने के अर्थ, कोई एक पृष्ठ वा धरातल की एकाई माननी आवश्यक होती है इसके अर्थ, वर्ग बनाती हुई रेखाओं के अन्तर्गत धरातल ही सर्व सम्मत एकाई मानी जाती है, यथा पूर्व आकृति में, क ख, भुज, एक इच्छ की रेखा होवे तो, क ख ग घ, वर्गजेव में, धरातल का एक इच्छ, वा १ वर्ग इच्छ होगा तथा, क ख, एक फुट लंबी होवे तो, क ख ग घ, वर्ग में धरातल का एक फुट, वा १ वर्गफुट होगा; इत्यादि ॥

इसी से, विद्यार्थी इस बात को कभी नहीं चूकेगा, क्योंकि कोई की एकाई से, पृष्ठ वा धरातल की एकाई स्वभाव ही भिन्न होती है ॥

३ क ख ग घ, रूक जात्य, ष
चतुर्बाहु में, घगतल की एकाई नि-
श्चित की, चाहिये



यथा, क ख = ४ इच्छ, और क
घ = ३ इच्छ हैं, यहा, क ख, और,
क घ, रेखाओं के, भाग चिन्हों में हो
कर समान्तर रेखा खैवने से, प्रत्यक्ष है कि इस आयत के,
वर्ग इच्छरूप भाग होजायंगे; और प्रकट है, कि हरएक
आड़ो पंक्ति में वर्गइच्छों की संख्या, क ख, की रेखात्मक
एकाइयों की संख्या के तुल्य होवेगी तथा इन पंक्तों की
संख्या, क घ, भुज की रेखात्मक एकाइयों की संख्या के तुल्य
होगी इसलिये, संपूर्ण आयत की वर्गात्मक एकाइयों की
संख्या, क घ, की एकाइयों से गुणित, क ख, की एकाइयों के
तुल्य होगी, अर्थात्, क ख ग घ, समास में घगतलात्मक एकाई
= क ख × क घ ॥

हरएक क्षेत्र की इन इकाइयों से, उसका क्षेत्रफल
कहते हैं ॥

यथा, इसी उदाहरण में क्षेत्रफल = ४ × ३ = १२
वर्गइच्छ.

इसी से, क ख ग घ, आयत का वर्गात्मक स्वरूप, क ख,
क घ, लिखा जायगा, तथा, क ख ग घ, वर्ग का (प्र० ३६.)
क ख, ख ग, वा क ख^२ इसी से समास चतुर्भुजों के क्षेत्रफल
लाने के लिये यह सूत्र सिद्ध हुआ ॥

सूत्र — चौड़ाई से लंबाई को गुण दो, जो फल आवे
वही समकोण चतुर्भुज का क्षेत्रफल होगा ॥

उदाहरण ॥

(१) जिम समास की लंबाई = ६ फु० और चौड़ाई = ७ फु० उसका क्षेत्रफल क्या होगा ? उत्त. यहां क्षेत्र फु० = ६ × ७ = ४२ वर्ग फु०

(२) एक वर्गक्षेत्र की भुज ६ इंच है, उसका क्षेत्रफल क्या होगा ? --- --- --- उत्त ३६ वर्गइंच ॥

(३) सिद्ध करो, कि एक वर्गगज में ६ वर्गफुट होंगे ॥

(४) सिद्ध करो, कि एक वर्गफुट में १४४ वर्गइंच होंगे ॥

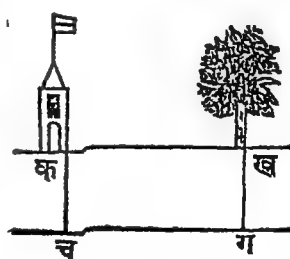
(५) सिद्ध करो, कि आधी रेखा पर होने वाले वर्ग से, संपूर्ण रेखा पर बना वर्ग चौगुना होगा ॥

(६) सिद्ध करो, कि १ फुट लंबे, १ इंच चौड़े समास का फल, एक वर्गफुट का बारहवां अंश होगा ॥

अधिक उदाहरणों के अर्थ, क्षेत्र व्यवहार के प्रश्न करने चाहियें ॥

३ क, ख, एक दूसरे से, अगम्य दो पदार्थों के बीच की दूरी को स्वास्तिक वंश से मापने की रीति ॥

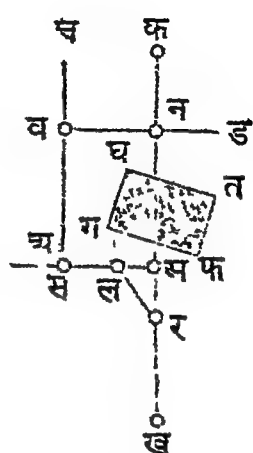
कोई, ख ग = क च, दूरी लेकर भूमि पर, क ख, के समान्तर च ग सरल रेखा करलो, और स्वास्तिक वंश से, प्र० १० जहा, ग च के साथ, क च, समकोण बनाती हो, वह, च, बिन्दु निश्चित करो, और इसी रीति से ग, बिन्दु भी अब, ग च, को मापने से आकांचित, क ख, दूरी गजावेगी ॥



क्योंकि, क ख ग च, समान्तर बाहु है, और इसी से, क ग च, सन्मुख-भुज तुल्य होगी ॥

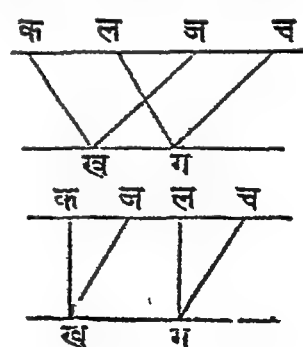
४- ख म, सरल रेखा को, ग घ त फ, एक आड के पार भी बनी रखने का प्रकार ॥

यथा, म, बिन्दु से, (स्वस्तिक बंश, वा ४८ प्र० में उक्त रीति से) म अ, लंब डालकर, म स = १ जरीब, वा और कोई योग्य दूरी लेलो, और उस पर, अ च लंब डालकर, आड से, बढ़ कर किसी, व, बिन्दु से, म च, पर, व ड लंब डालो, और, व न = स म, मापकर, न बिन्दु से, न व, पर, न क, लंब डालो, तो न क, ख म, सरल रेखा का भाग होगा और, स व, के मापने से, म और, न, के बीच की दूरी आजावेगी



क्योंकि, म स व न, साक्षात् समाप्त है, इसी से, म न = स व, तथा, व न क, व न म और, स म न, स म ख, सब समकोण है, इस से, न क, ख म, एक ही, म न रेखा में होंगे ?

४०. साध्य-ख ग, क च, एक ही, समान्तर रेखाओं के बीच में, और, एक ही, ख ग, आधार पर के, ख ग ल क, और, ख ग च ज, समान्तर बाहु, समान होंगे ॥



३९. प्र० से, क ल = ख ग, तथा च ज भी = ख ग: ∴ क ल = च ज, क्योंकि वे दोनों एक ही, ख ग

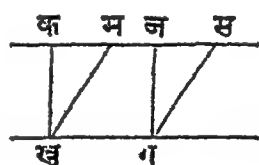
के तुल्य हैं अब, क च, से क ल ले डालने से, च ल, और उसी से, च ज, ले डालने से, क ज, शेष रह जावेगे इस से,

च ल = क ज, क्योंकि यहां एक ही रेखा से तुल्य रेखा ले डाली गई है अब, ल ग च, क ख ज, त्रिभुजों में, ल ग = क ख, ग च = ख ज, और च ल = क ज, इसी से, १६ प्र० से, ये त्रिभुज एकसे हैं। अब संपूर्ण ख ग च क, आकृति से, पहले, ल ग च, त्रिभुज ले डालने से, ख ग ल क, समान्तर बाहु शेष रहेगा; और फिर, उसी, ख ग च क आकृति से, क ख ज, त्रिभुज ले डालने से, ख ग च ज समान्तर बाहु शेष रहेगा

• ख ग ल क समान्तर बाहु = ख ग च ज समान्तर बाहु
क्योंकि यहां एक ही क्षेत्र से समान क्षेत्र क्रम से ले डाले गये हैं ॥

इस साध्य का प्रयोग ॥

ख ग स म, समान्तर बाहु का, ख ग ज क, आयत में परिवर्तन करने का, यथा, ख ग स म, समान्तर बाहु में, ग स ज, त्रिभुज काट कर, ख क म, पर रख दो, अब, ख ग स म का, ख ग ज क, आयत होगया ॥



इस साध्य से यह आता है, कि समान्तर बाहु का क्षेत्रफल, तुल्य आधार औच्य के, आयत के क्षेत्रफल के समान होता है, इसी से, समान्तर बाहुओं के क्षेत्रफल लाने को यह सूत्र सिद्ध होता है ॥

सूत्र — आधार की रेखात्मक एकाइयों को लंब की रेखात्मक एकाइयों से गुणने से, जो फल आवेगा वह समान्तर बाहु के क्षेत्रफल की वर्गात्मक एकाइयों के तुल्य होगा ॥

उदाहरण ॥

१. ख ग स म, समान्तर बाहु का, जिसका, ख ग, आधार = १२ फुट, और, ग ज लंब = ६ फुट है कहे क्षेत्रफल क्या होगा ?

यहा क्षेत्रफल = $12 \times 6 = 72$ वर्ग फुट ॥

२. उस समान्तर बाहु का क्षेत्रफल क्या होगा जिसका आधार = १६ फुट और लंब ३२ फुट ? — उत्त. १७६२ वर्ग फुट ॥

३. वर्गक्षेत्र की क्या भुज होगी, जिसका क्षेत्रफल, ५६ गज लंबे, ६ गज चौड़े समान्तर बाहु के क्षेत्रफल के समान होवे ?

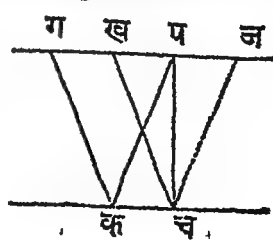
यहा $y =$ भुज की फुट संख्या रखलो, $\therefore y \times y$, वा, $y^2 =$ वर्गक्षेत्र की वर्ग फुट संख्या तथा $16 \times 6 = 96 =$ समान्तर बाहु की वर्ग फुट संख्या \therefore प्रश्न से, $y^2 = 96$
 $\therefore y = 12$ फुट ॥

४. २० फुट लंबे, आयत की क्या चौड़ाई होगी, जिसका क्षेत्रफल १ उदा० के समान्तर बाहु के समान होवे ?

उत्तर ४ फुट

५. एक समान्तर बाहु का, क्षेत्रफल २०४ वर्ग फुट और आधार १० फुट है उसका लंब क्या होगा ? उत्त १२ फुट

४१ साध्य—क च ख ग, समान्तर बाहु, और क च प, त्रिभुज, क च, ग ज, एक ही समान्तर रेखाओं के बीच में और एक ही, क च, आधार पर होवे, तो त्रिभुज, समान्तर बाहु का आधा होगा ॥



यथा, क प, के समान्तर च ज, खेचलो, तो ३१ प्र० से, क, च प, त्रिभुज = आधा क च ज प,

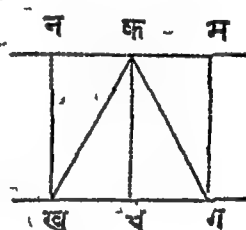
समान्तर वाहु, परंतु क च ख ग, समान्तर वाहु = क च ख ग,
समान्तर वाहु, इसलिये, क च प, त्रिभुज भी = आधा, क च ख ग
समान्तर वाहु ॥

अनु० एक ही समान्तरो के बीच में एक ही आधार के
त्रिभुज समान होते हैं ॥

इस साध्य का प्रयोग ॥

१० सिद्ध किया चाहिये, कि ख ग म न आयत में, ख ग क,
त्रिभुज से दुना क्षेत्रफल है ॥

यथा, ख ग, आधार पर क च,
लंब मान लो अब, आयत से, क ग म
छाट लिया जावे तो, यह ठीक २,
क च ग, भाग से युक्त हो सकेगा,
और इसी रीति से, क ख न, भी ठीक २
क च ख से युक्त हो सकेगा, इसी से
स्पष्ट है, कि त्रिभुज से आयत दुना है ॥



इस साध्य से यह आता है, कि त्रिभुज का फल, तुल्य आधार
और औच्य के, आयत के फल से आधा होता है, इसी से
त्रिभुज के क्षेत्रफल के अर्थ यह सूत्र सिद्ध हुआ ॥

सूत्र — आधार की रेखात्मक इकाइयो को, लंब की
रेखात्मक इकाइयो से गुणा दो, तो त्रिभुज के फल की वर्गात्मक
इकाइया इस घात के आधे के तुल्य होवेगी ॥

उदाहरण ॥

(१) क ख ग, त्रिभुज का, ख ग, आधार = ७ फु० और
क च, लंब = ८ फु० क्षेत्रफल कहे ॥

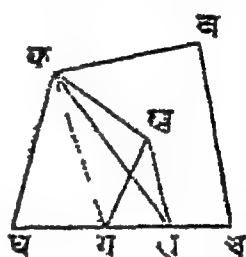
यहां, ख ग म न, आयत का क्षेत्रफल = ७×८ , परंतु क ख ग, त्रिभुज में इसका आधा क्षेत्र है; \therefore क ख ग, त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{७ \times ८}{२} = २८$ वर्गफुट, ॥

(२) एक त्रिभुज का आधार, २५ इंच, और लंब २२ इंच है फल क्या होगा ? — — — — उत्तर २७५ वर्गइंच ॥

२. क ख ग घ, और, क ख ग घ ज, दो खेतों का आकार बिना बदले, उन्हीं के बीच की क ख ग, टेढ़ी मेड़ को सीधी कर लेना

यथा क ग, को जोड़कर उसके समान्तर, ख ल, खिंचलो, और क ल, को जोड़ दो, तो यहां आकाक्षित मेड़ की सीध होगी,

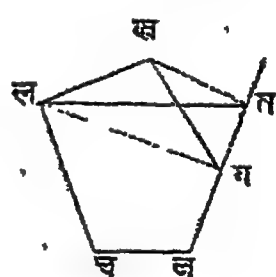
क्योंकि क ल ग, क ख ग, त्रिभुज समान हैं (४१. प्र० अनु०) इसी से क ल घ, क्षेत्र = क ख ग घ क्षेत्र.



३. एक लोहे की सड़क के कटाव का, चल ख ग ज आकार है.

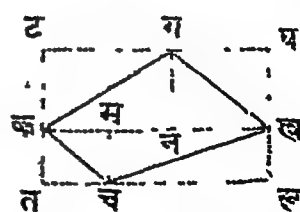
अब, इसे, चल त ज, तुल्य क्षेत्र में लेनाना चाहिये ॥

यहां सब क्रिया पूर्व प्रश्न के मट्टण ही है ॥



४२. साध्य—क च ख ग, विषम चतुर्भुज, त ल प ट, वहिर्गत आयत का आधा होगा, जिसकी, त ल, भुज, क ख, कर्ण के समान्तर है

यथा ४१ प्र० से, क ख ग, त्रिभुज = आधा, क ट प ख, आयत, तथा, क च ख, त्रिभुज = आधा,



क त ल ख आयत, इसलिये, इन दोनों समानों को जोड़ देने से, क च ख ग, विषम चतुर्भुज = आधा त ल प ट आयत ॥

इस साध्य का प्रयोग ॥

इस साध्य से विषम चतुर्भुजों के क्षेत्रफल लाने का यह सूत्र सिद्ध होता है, ॥

सूत्र — कर्ण को उस पर पड़े लंबों के योग से गुण दो, और उसका आधा, विषम चतुर्भुज का फल होगा. ॥

ल्यौकि, त ट = च म + ग न, इसी से पर्व्व साध्य में, क च ख ग का क्षेत्रफल $= \frac{त ल \times त ट}{२} = \frac{क ख (च म + ग न)}{२}$

उदाहरण ॥

१ एक विषम चतुर्भुज का कर्ण, क ख = २६, फु० ग न, लंब = ८ फु०, और च म = ६ क्षेत्रफल कहो ॥

यहां लंबों का योग, वा, त ट = ८ + ६ = १४ फुट, ॥

∴ बहिर्गत आयत, त ल प ट का क्षेत्रफल = २६ × १४,

परंतु, क च ख ग विषम चतुर्भुज का क्षेत्रफल, इस आयत का आधा है, ∴ क च ख ग का क्षेत्रफल = $\frac{२६ \times १४}{२} = १८२$ वर्ग फु०, अथवा प्रकारान्तर से.

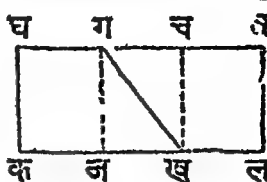
यथा, क ख ग, त्रिभुज, का क्षेत्रफल = $\frac{२६ \times ८}{२} = १०४$ वर्ग फु०, तथा, क च ख, का = $\frac{२६ \times ६}{२} = ७८$ वर्ग फु०,

∴ क च ख ग क्षेत्र = १०४ + ७८ = १८२ वर्ग फुट

२. एक विषम चतुर्भुज का कर्ण = १८ गज और उस पर लंब, ५ और ४ है, क्षेत्रफल क्या होगा? — ३०८१ वर्ग गज.

४३ साध्य — क ख ग घ, समलंब, जिसकी क ख, घ, दो भुजा समान्तर हैं, क ल त घ, समान्तर बाहु के

जिसका, क ल, आधार, क ख, ग घ, दोनों समान्तर भुजों का योग है, और तुल्य लंब है, घ ग च ल, आधे के समान होगा.



यथा, क घ, वा त ल, के समा-
न्तर, ग घ, और ख च, खेंचलो, तो

ख ग च, त्रिभुज, ग ज ख, त्रिभुज के तुल्य होगा, तथा,
ख ल = ग घ; इस से, ख ल त च समान्तर बाहु क ज
ग घ, समान्तरबाहु के तुल्य होगा, इसलिये, ग त ल ख,
समलंब, क ख ग घ समलंब के तुल्य होगा.

क्योंकि एक के भाग ठीक २ दूसरे के भागों के तुल्य है,
इस से, ज्ञाता है कि, क ख ग घ, समलंब, क ल त घ, समा-
न्तरबाहु का आधा है ॥

इस साध्य का प्रयोग ॥

इस साध्य से समलंब चतुर्भुजों के क्षेत्रफल लाने के लिये
यह सूत्र सिद्ध होता है ॥

सूत्र, — दोनों समान्तर भुजों के योग को उन्हीं के
अन्तर्गत लंब से गुण दो, अब इस घात का, आधा, समलंब
चतुर्भुज का क्षेत्रफल होवेगा ॥

उदाहरण ॥

१ — क ख ग घ, समलंब का क्षेत्रफल क्या होगा, जब,
क ख = ६ फु०; ग घ = ४ फु० और ग ज लंब = ५ फुट है ?

यहां समान्तर भुजों का योग, क ल = ६ + ४ = १०

∴ क ल त घ, आयत का फल = १० × ५ परंतु क
ख ग घ, समलंब का फल इस आयत का आधा है. ॥

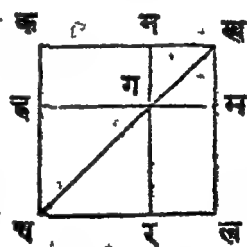
$$\therefore \text{क ख ग घ क्षेत्र} = \frac{10 \times 4}{2} = 20 \text{ वर्गफुट}$$

० एक समलंब की समान्तर भुज, क्रम से, ६, और १० फुट हैं तथा उन्हें के अन्तर्गत लंब, ८ फुट है कहो उसका क्षेत्रफल क्या होगा ? — — उत्तर ०. ६६ वर्गफुट ॥

४४ साध्य — च ल संपूर्ण रेखा का वर्ग च र, र ल दोनों खण्डों के वर्ग और उन्हें के दूने घात के मिलकर तुल्य होता है

$$\text{अर्थात् च ल}^2 = \text{च र}^2 + \text{र ल}^2 + २ \text{ च र र ल}$$

यथा, च ल, पर, च ल ख क, वर्ग, और, च र, पर, च र ग ह, वर्ग, है अब, ह ग, को, म तक और, र ग, को, न, तक बढ़ाने से, ख न ग म, भाग, ख न, पर, वा, र ल, पर वर्ग होगा और, क न ग ह, आयत, र ल म ग, आयत के तुल्य होगा (प्र० ३०) परंतु यह आयत र ल, और, ल म, वा र ल, और च र का घात है; और संपूर्ण वर्ग च ल ख क, दो, च र ग ह, और, ख न ग म, वर्ग तथा, क न ग ह और, र ल म ग, दो आयतों से मिलकर बना है



$$\therefore \text{च ल}^2 = \text{च र}^2 + \text{र ल}^2 + २ \text{ च र र ल}$$

यह साध्य बीज से भी शीघ्र सिद्ध होजाता है-

$$\text{यथा च र} = \text{क}, \text{र ल} = \text{ख, रखलो, तो } (\text{क} + \text{ख})^2 = \text{क}^2 + \text{ख}^2 + २ \text{ क ख} ॥$$

$$\text{अर्थात् } (\text{च र} + \text{र ल})^2 \text{ वा, च ल}^2 = \text{च र}^2 + \text{र ल}^2 + २ \text{ च र र ल} \text{ — — — — — (१)}$$

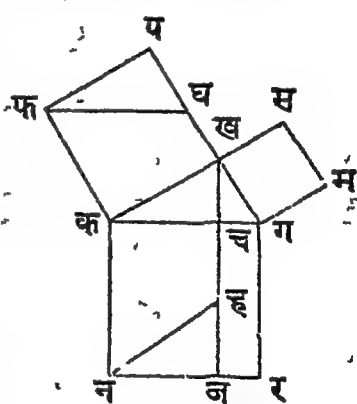
और इसा रीति से, चल = क, रखने से, $(क - ख.)^2 = क^2 + ख^2 - २क ख$. अर्थात्, $(चल - रल)^2$ वा $र^2 = चल^2 + रल^2 - २चल रल$. $\therefore (२)$

अर्थात् दो रेखाओं के अन्तर पर बना वर्ग, उन रेखाओं के दूने घात से हीन उन्हे के वर्गयोग के तुल्य होता है. तथा, $क^2 - ख^2 = (क + ख)(क - ख)$ --- (३)

अर्थात् हर एक दो रेखाओं का वर्गान्तर उन्हीं के योग और अन्तर के घात के तुल्य होता है. ॥

रेखा गणित का सेंतालीसवां क्षेत्र और उमके आधेन समकोण क्षेत्रों के कुछ विशेष गुणों का वर्णन ॥

४५. सा० प्र० क ख ग समकोण त्रिभुज के क ग, आधार पर बना वर्ग, और दो भुजों पर बने वर्गों के योग के तुल्य होता है अर्थात् $क ग^2 = क ख^2 + ख ग^2$



यथा, क ग आधार पर, क न र ग, वर्ग बनाओ और ग ख, को खटाकर, ख प = ख क, करके,

प फ, फ क, क्रम से, क ख, ख प, के समान्तर खेंचलो, अब, क्योंकि $\angle क ख ग$, समकोण है इसलिये $\angle क ख प$, भी समकोण होगा इसी से, क ख प फ, वर्गक्षेत्र है. इसी रीति से, ख ग म स, वर्ग भी बना लो, और, क न, क ग, क ख, के समान्तर क्रम से, ख ज, फ घ, न ह, रेखा करलो, अब, $\angle ग क न = \angle ख क फ$. क्योंकि समकोण है. इन तुल्यों में, $\angle ग क ख$, जोड़ने से, $\angle ग क न + \angle ग क ख = \angle ख क फ + \angle ग क ख$, $\therefore \angle ख क न = \angle ग क फ$. अब,

क ख ह न, और क फ घ ग, समान्तर बाहों में क न, क ग, क ख = क फ, और उन्हें के बीच के कोण भी तुल्य है, अर्थात् \angle ख क न = \angle ग क फ, इसलिये ३० प्र० से, ये समान्तर बाहु एकसे हैं परन्तु ४० प्र० से, क ख प फ, वर्ग = क फ घ ग, समान्तर बाहु, और, क न ज च, आयत = क ख ह न, समान्तर बाहु परन्तु जो पदार्थ एक ही पदार्थ के तुल्य होते हैं वे तुल्य होते हैं \therefore क ख प फ, वर्ग = क च ज न, आयत. ठीक २ इसी रीति से, ख ग म स, वर्ग भी, ग च ज र आयत के तुल्य है, इसलिये, दोनों क ख प फ, और, ख ग म स, वर्गों का योग, क च ज न, और, ग च ज र, आयतों के योग, वा क न र ग, वर्ग के तुल्य है।

अनु० १ — क ग, कर्ण प्रत्येक, क ख, ख ग, से बड़ा है क्योंकि, क ख^२ से क ग^२ बड़ा है इसलिये, क ग, भी, क ख, से बड़ा होगा।

अनु० २ क ख^२ + ख ग^२ = क ग^२. इस समी० के दोनों ओर से, ख ग^२ ले डालने से, क ख^२ = क ग^२ - ख ग^२

उक्त साध्य के प्रयोग और उदाहरण ॥

१ — एक समकोण त्रिभुज की दो भुज क्रम से ८ और ६ फु० हैं कर्ण चाहिये ॥

य = कर्ण रखलो, तो, य^२ = ८^२ + ६^२ = १००, दोनों ओर का वर्गमूल लेने से, य = १०

२ एक समकोण त्रिभुज की १६ और १२ फु० क्रम से भुज हैं, कर्ण कहो, — — — —, उत्त० २० फु०

३ जब, कर्ण २५ और एक भुज १५ है तो दूसरी भुज क्या होवेगी ?

य = दूसरी भुज रखलो, तो $y^2 + १५^2 = २७^2$ दोनों
पक्षों से १५^2 ले डालने से $y^2 = २७^2 - १५^2 = ४००$ दोनों ओर का
मूल लेने से, $y = \sqrt{४००} = २०$.

४. कर्ण ३० और एक भुज २४ होवे तो अन्य भुज
क्या होगी ? — — — — — उत्तर १८.

४६. साध्य—समकोण त्रिभुज की, ख ग, क ग भुज कोटि
दी है, कर्ण पर का ग प, लंब लाना चाहिये ॥

उदा० १. ख ग = २१ और, क ग = २८ रखलो, तो,
क ख^२ = २१^२ + २८^२ ∴ क ख = ३७

अब, क ख ग, त्रिभुज का क्षेत्रफल
दो प्रकार से आसता है

यथा, क ख ग क्षेत्र = $\frac{२१ \times २८}{२}$, तथा क

ख ग = $\frac{३७ \times ग प}{२}$ परंतु एक ही वस्तु के
तुल्य पदार्थ आपस में समान होते हैं

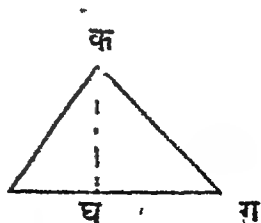
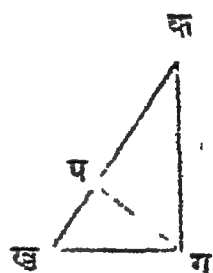
∴ $\frac{२१ \times २८}{२} = \frac{३७ \times ग प}{२}$, इस समी० से

ग प = १६.८ आता है ॥

२. ग प चाहिये, जब, ख ग = २४, क ग = ३२.
दी है — — — — — उत्तर १८.२

४७. सा० — क ख ग, त्रिभुज की
तीनों भुजां दी है और, आबाधा, ख घ,
लंब, क घ, तथा क्षेत्रफल, ताना चाहिये ॥

उदा० १ — ख ग = २०, क ख
= १०, तथा, क ग = १२ रखतो, और, य = ख घ, मानलो,
तो, ग घ = २० - य अब, क ख घ, और क ग घ, समकोण
त्रिभुजों से क घ^२ के दो स्वरूप आसते हैं.



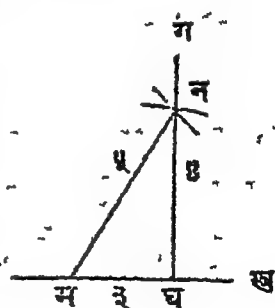
यथा, अनु० २ से, क घ^२ = १०^२ - य^२ तथा, क घ^२ = १२^२ - (२० - य)^२ परंतु ये एक ही वस्तु के स्वरूप हैं इसलिये अवश्य, समान है $\therefore १०^२ - (२० - य)^२ = १०^२ - य^२$, इस समी० से, य, = ८.६ आता है यही ख घ, आवाधा है, तथा लंब के अर्थ, क घ = १०^२ - ८.६^२ यह समी० है, इस से क घ = ४.५५ इसी से विभुज का क्षेत्रफल भी = $२० \times ४.५५ \div २ = ४५.५$.

२. पूर्व उदा० वत् उत्तर चाहिये, जब, क ग = ६, क ख = ४, और ख ग = ५. .. उत्त० ख घ = ५, क घ = ३.६६ और क्षेत्रफल = ६.६.

४= जगीब, वा डोरी से भूमि पर लंब डालने का प्रकार ॥

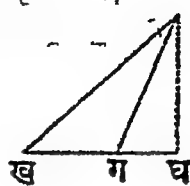
यथा, क ख, डोरी की रेखा में, घं दिये बिन्दु से, घ ग लंब डालना चाहिये ॥

घ म = ३० कड़ी मापकर, डोरी का एक सिरा, म, पर रखकर, ६० कड़ी को म न घ, की सीध में डाललो अब, न घ = ४० कड़ी और, \therefore म न = ५० करता हुआ, क न, पर एक वश रक्खा जावे तो, घ न, वर्द्धित रेखा आकाक्षित लंब होगी



क्योंकि म न घ समकोण विभुज होगा इसका हेतु यह है कि $३^२ + ४^२ = ५^२$ और इन्हे के तुल्य घातो का । यही लक्षण होता है ॥

४६. साध्य प्र०— अधिक कोण त्रिभुज में, अधिक कोण के सम्मुख, क ख, भुज का वर्ग, ख ग, ग क, अन्य दो भुजों के वर्गयोग से, ख ग, आधार और अधिक कोण से लंब की, ग घ दूरी के द्विगुणित घात के तुल्य, अधिक होता है;



अर्थात्, $क ख = ख ग^2 + ग क^2 + २ ख ग. ग घ.$

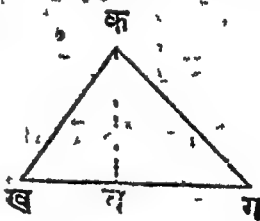
क्योंकि ४४. प्र० से, $ख घ^2 = ख ग^2 + ग घ^2 + २ ख ग. ग घ.$

इन समानों में, क घ^२ जोड़ने से, $ख घ^2 + क घ^2 = ख ग^2 + ग घ^2 + क घ^2 + २ ख ग. ग घ.$ परंतु $ख घ^2 + क घ^2 = क ख^2$ और, $ग घ^2 + क घ^2 = क ग^2$

∴ $क ख^2 = ख ग^2 + क ग^2 + २ ख ग. ग घ. ॥$

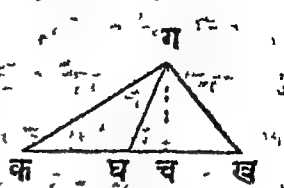
४७. साध्य प्र०— क ख, न्यून कोण के सम्मुख होवे तो $क ख^2 = ख ग^2 + क ग^2 - २ ख ग. ग घ ॥$

क्योंकि, ४४. प्र० (२) समी० से, $ख घ^2 = ख ग^2 + ग घ^2 - २ ख ग. ग घ$, इन तुल्यों में, क घ^२ जोड़ने और पूर्व साध्यवत् क्रिया करने से, $ख घ^2 + क घ^2 = ख ग^2 + ग घ^2 + क घ^2 - २ ख ग. ग घ$, ∴ $क ख^2 = ख ग^2 + क ग^2 - २ ख ग. ग घ.$



४९. साध्य प्र०— हर एक, क ख ग, त्रिभुज में सिरों से आधार के मध्य तक, ग घ, खैची जावे तो, $क ग^2 + ख ग^2 = २ क घ^2 + २ ग घ^2$ आवेगा ॥

यथा, क ख, पर, ग घ, लंब डोलने से, क ग घ, ख ग घ
 दो त्रिभुजों से, उक्त दो साध्यों के अनुसार,
 $क ग^२ = क घ^२ + ग घ^२ + २ क घ, घ$
 च.



तथा, ख ग^२ = ख घ^२ + ग घ^२ - २ ख घ, घ च

अब, इन तुल्यों को जोड़ने और, क घ = ख घ, पर दृष्टि
 करने से, क ग^२ + ख ग^२ = २ क घ^२ + २ ग घ^२, आता है ॥

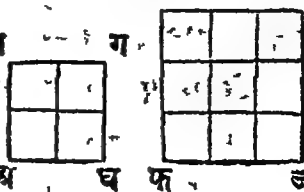
रेखा, तथा क्षेत्रों की निष्पत्ति : सजातीय त्रिभुज ॥

७२ दो रेखा, वा कोई प्रकार ग
 की राशि की निष्पत्ति, वा सम्बन्ध.
 उन्हीं के सापेक्ष परिमाणों को फ
 कहते हैं ॥ ख

यथा, क ख, में तीन एकाई, और ग घ, में पांच एकाई
 हों तो, ग घ, पांच गुणित, क ख, की तिहाई के तुल्य होगा.
 वा साधारण से उन्हीं का सम्बन्ध ऐसे लिखा जायगा, क ख
 $= \frac{3}{5}$ इस से यह जाना जाता है कि ग घ, में क ख, जे बेर
 जासके वही, ग घ का क ख से सम्बन्ध होगा.

अर्थात् भाज्य का भाजक से सम्बन्ध, उन्हीं की लब्धि है
 वा लब्धि ही का, नामान्तर सम्बन्ध वा निष्पत्ति है ॥

इसी प्रकार से, फ ल, वर्गक्षेत्र में, नौ वर्गों की एकाई, तथा
 अ ग, वर्गक्षेत्र में, चार वर्गों की एकाई हों तो, फ ल, क्षेत्र, न
 नौ गुना, अ ग, क्षेत्र की चौथि-
 आई होगा, अथवा फ ल अ ग = $\frac{9}{4}$ ॥



१ दो निष्पत्ती समान होवें तो उसे अनुपात कहेंगे, वा वे सम्बन्धी राशें समनिष्पत्तिक होवेंगी, ॥

यथा, $\frac{ग घ}{क ख} = \frac{१}{३}$ होवे तो यह अनुपात होगा, ग घ : क ख ::

५ : ३ वा साधारण से, ग घ क ————— ख
से, क ख, की निष्पत्ति, ज भ से, ग ————— घ
च छ, की निष्पत्ति, के तुल्य होवे च ————— छ
तो $\frac{क ख}{ग घ} = \frac{च छ}{ज भ} \dots \dots (१)$ ज ————— भ

निष्पत्ति की इस साम्य को, अनुपात के, साधारण स्वरूप में लिखने से यह आकार होगा क ख, : ग घ :: च छ : ज भ $\dots \dots (२)$ ॥

इसे बोलने से शब्द में, ऐसे प्रकाशित करते हैं जैसी, क ख, ग घ को है वैसी ही च छ, ज भ को है, वा, ग घ को क ख, जैसी च छ है ज भ को इस अनुपात के (१), लक्षण से, गुणने से, क ख : ज भ = ग घ : च छ, $\dots \dots (३)$ ॥

अर्थात् हर एक अनुपात में छोर की राशों का घात मध्य राशों के घात के तुल्य होता है ॥

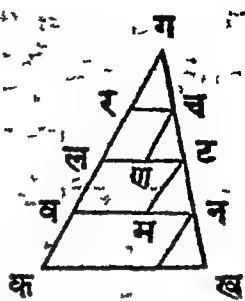
भाग देने से इस पिछले समी० से $\frac{क ख}{च छ} = \frac{ग घ}{ज भ}$ वा, क ख : च छ :: ग घ : ज भ. इस से यह जाना जाता है

कि (२) समी० वत् चार राशें अनुपात में होवें तो दो मध्य राशों के परिवर्तन से भी वे चारों अनुपात ही में रहेंगी

इस से राशों को परिवर्तन वा एकान्तर निष्पत्ति कहते हैं

। ऐसे ही ग घ : क ख :: ज भ : च छ. यहां (२) अनुपात की राशें बदल दी हैं.

५३. साध्य प्र० :- क ग, के कितने ही समान भाग, ग र, = र ल = ल व, करलो, और र च, ल ट, व न, क ख के समान्तर खैच लो तो, ख ग, के उतने ही समान भाग, ग च, = च ट = ट न, होजविगे यथा, च ण, ट म, क ग, के समान्तर खैचलो, तो, ग र च, च ण ट, त्रिभुज एक से होंगे, क्योंकि, च र, ण ल, समान्तर रेखाओं का समान्तर बाहु बनेगा. इसी से, च ण = र ल = ग र, तथा \angle ट च ण = \angle च ग र और \angle च ण ट = \angle ग र च, इसलिये, १०. प्र० से, च ट = ग च, ऐसे ही न ट = ट च, होवेंगी इत्यादि ॥



आयत एक दूसरे को है जैसे कि उन्हीं के, क ख, क च, आधार है प्रथम, आधारों को एक परिमेय, अर्थात् किसी और रेखा के ठीक २ गुण मानलो, और, क ख, के तुल्य पांच भाग मानलो जिन्हों में से तीन, क च में है, अब, हर एक तुल्य भाग के चिन्ह से आधार पर लंब डाललो तो इस प्रकार से पांच समान आयत बन जावेंगे जिन्हों में से, क ख ग घ, में तो पांचों पर, क च छ घ, में तीन ही होंगे इसलिये, क ख ग घ = ५ वा क च, वा अनुपात के आकार में, क ख ग घ : क च छ घ :: क ख : क च, यह प्रकट ही है कि क ख, की क च से चाहे जो निष्पत्ति होवे, अनुमान प्रकार ठीक २ ऐसा ही होवेगा, अब, आधारों को भिन्न परिमेय मानलो, और, क ख, के कितने ही समान भाग करलो, जिन्हों में से ज, भाग बिन्दु च, के निकट हो तो, क्योंकि, क ख, का ज, एक परिमेय है इसलिये, $\frac{\text{क ख ग घ}}{\text{क ख}} = \frac{\text{क ज}}{\text{क ख}} \text{ वा } \frac{\text{क च छ घ}}{\text{क ख ग घ}} + \frac{\text{च ज भ छ}}{\text{क ख ग घ}}$

अनु० क ग, में कोई, ल, बिन्दु लेने से जाना जायगा कि, ग ल, से जै गुणी, क ग होगी उतने ही गुणी, ग ट, से, ख ग होगी अर्थात् $\frac{\text{क ग}}{\text{ग ल}} = \frac{\text{ख ग}}{\text{ग ट}}$ अथवा क ग : ग ल :: ख ग : ग ट ॥

१४. साध्य प्र० तुल्य कोण त्रिभुज सजातीय होते हैं अर्थात् उन्हीं के सदृश भुज एक निष्पत्तिक होते हैं ॥

यथा, क ख ग, और, च ल न, दो तुल्य कोण त्रिभुज हैं जिन्हों के $\angle क = \angle न$, $\angle ख$

$= \angle च$, और $\angle ग = \angle ल$,

तो, क ख : क ग :: न च : न ल,

क्योंकि, क र = न च, और, क म

= न ल, लेकर, र और, म बिन्दु

जोड़दों तो, क र म त्रिभुज, न ल

च, के समान होगा, तथा $\angle र =$

$\angle च$, वा $\angle ख$, इसलिये, (३० प्र०), र म, ख ग, के समान्तर

होगी अब, क र, र ख, कितने ही समान भाग मानलो,

$\frac{\text{क च}}{\text{क ख}} = \frac{\text{च न}}{\text{क ल}}$ परंतु च न : क ल, और, च न : चाहे

जितनी सूक्ष्म हो सकती है जब कि, और सब यथावस्थित

ही रहें आवें, इसलिये, अवधि की रीति से, $\frac{\text{क च}}{\text{क ख}} = \frac{\text{क च}}{\text{क ख}}$

क ख ग घ, और, क च न, आयें एक दूसरे को है जैसे

कि उन्हीं के आधार और लंबों के घात हैं

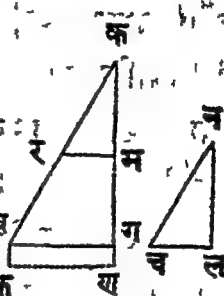
न च, को ल, तक बढ़ा लो, तो, पूर्व साध्य से $\frac{\text{क ख}}{\text{क च}} = \frac{\text{न ल}}{\text{क न}}$

क च, तथा $\frac{\text{क ख}}{\text{क ल}} = \frac{\text{क घ}}{\text{क न}}$ इन समी०

को गुण देने से, $\frac{\text{क ख}}{\text{क च}} = \frac{\text{क घ}}{\text{क न}}$

अब, क न, और, क च, प्रत्येक को एक ही मान

लो, तो, क च न, दो व की, एकाई होगी,



क	ख
च	न

और, इन भागों में होकर ख ग, के समान्तर रेखा खेंची जावे, तो पूर्व साध्य से, क म, के उतने ही समान भाग होजायेंगे जितने, क र, के हैं, तथा, क ग, के भी उतने ही समान भाग होजायेंगे जितने कि, क ख, के हैं; इस से यह आता है, कि क र, वा, न च, से जै गुणी क ख, होगी उतने ही गुणी, क म, वा, न ल, से, क ग होवेगी; अर्थात् $\frac{क म}{न च} = \frac{क ग}{न ल}$
 वा, क ख : न च, :: ग क : न ल, और एकान्तर निष्पत्ति से (प्र० ३२) क ख : ग क :: न च : न ल.

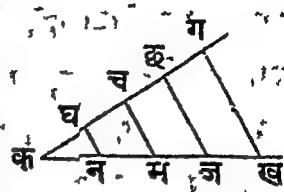
और, \therefore क ख ग घ, क्षेत्रों का एकत्रिं = क ख \times क घ.
 यहाँ क ख, और क घ, उन्हीं की रेखात्मक एकाइयों के स्थान में रखी है इसी से, इस रीति, से, यह वाक्य सिद्ध हुआ है कि समान्तरवाहु का क्षेत्रफल, आधार और लंब के घात के तुल्य होता है. तथा हर एक त्रिभुज तुल्य आधार और उंच के समान्तरवाहु से आधा होता है इसी से त्रिभुजों का क्षेत्रफल उन्हींके आधार और लंबके आधे घात के समान होता है ॥

*क र, और, क ख, रेखा भिन्नपरिमेय होवें अर्थात् क र, के जैसे भाग हुए हैं वैसे, क ख, के न होसके होवें तो साध्य को इस रीति से सिद्ध किया चाहिये. — यथा, क र, के कुछ तुल्य भाग करलो, और उन्हीं में से एक को, र, से, ख, की ओर माप आओ, अब, ख फ, भाग उसकी बढ़ती मानलो और, ख ग, के समान्तर, फ ग, खेंचलो — अब क्योंकि, क फ, और, क र, एक परिमेय हैं इसलिये पूर्व साध्य के अनुसार, $\frac{क फ}{क र} = \frac{क म}{क र}$, परंतु, क फ = क ख, + ख फ, और, क ग = क ग + ग ग,
 \therefore अतिदेश से $\frac{क ख + ख फ}{क र} = \frac{क ग + ग ग}{क र}$ वा $\frac{क ख}{क र} + \frac{ख फ}{क र} = \frac{क ग}{क र}$
 अब क र, के भागों की संख्या बढ़ाने से, ख फ और, ग ग,

पूर्वसाध्य के प्रयोग ॥

१. क ख दी रेखा के कुछ समान भाग करो. यथा चार भाग करने को मानलो,

क, से कोई क ग, एक रेखा खेंचकर, कंपास को कुछ खोलकर, क घ, घ च, च छ, और छ, ग, चार समान भाग करलो अब, ख, और ग, को जोड़कर ख ग, के समान्तर, छ ज, च म, घ न, खेंचलो, तो क न = न म = म ज = ज ख.



२. कार्य माप नाम यंत्र—इस माप में इ ग, ग व, व स

न	श	म	च	ल	१०	३०	५०	७०	९०	१००
१	२	३	४	५	६	७	८	९	१०	११
१२	१३	१४	१५	१६	१७	१८	१९	२०	२१	२२
२३	२४	२५	२६	२७	२८	२९	३०	३१	३२	३३
३४	३५	३६	३७	३८	३९	४०	४१	४२	४३	४४
४५	४६	४७	४८	४९	५०	५१	५२	५३	५४	५५
५६	५७	५८	५९	६०	६१	६२	६३	६४	६५	६६
६७	६८	६९	७०	७१	७२	७३	७४	७५	७६	७७
७८	७९	८०	८१	८२	८३	८४	८५	८६	८७	८८
८९	९०	९१	९२	९३	९४	९५	९६	९७	९८	९९
१००	१०१	१०२	१०३	१०४	१०५	१०६	१०७	१०८	१०९	११०

इत्यादि हर एक तुल्य भागों में १०० अंश हैं तथा, इ ग के तुल्य १० भाग किये हैं इस से उसके हर एक भाग में १० अंश होंगे

अधिकाइयों को चाहे जितनी सूक्ष्म कर सकते हैं; इसलिये ख फ और ग ग अत्यन्त सूक्ष्म हो सकते हैं और इसी से अन्त में क ग (५२ प्र० का टिप्पन देखो) आवेगा.

यह साध्य, ६४ प्र० की टिप्पन की रीति से भी ठीक रूप से सिद्ध हो सकता है ॥

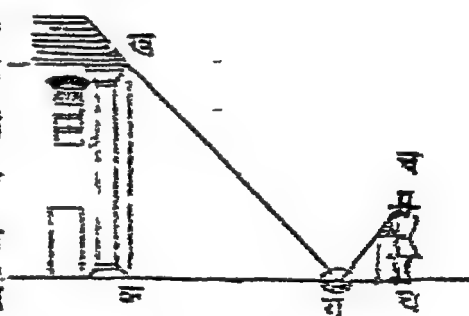
* प अक्षर (१० ल) कार्य रेखा पर है ॥

और कर्ण रेखा, १० से न. २० से १०, ३० से २० तक इत्यादि क्रम से डाली गई हैं इसलिये उन्हीं के द्वारा हर एक अंश भी आसकता है.

यथा, न, से प, तक दूरी ४०१ होगी तथा न, से ३ आड़ी रेखा प, १० प, कर्ण तक दूरी ४०२ होगी इत्यादि और ३५४ अंश चाहने होवें तो प्रथम, श, से ५० तक कंपास रखने से ३५० आवेगी और चार. ४ अंश के लिये कंपास की बाईं नोक को, श म खड़ी रेखा पर, पांच वीं आड़ी रेखा तक लाकर दूसरी नोक को, ५० कर्ण और ५ आड़ी रेखाओं के संगत बिन्दु तक बढ़ालाने से आक्रान्तिन ३५४ अंश की दूरी आजावेगी.

३. ग पर तिरछे रखे दर्पण के द्वारा एक पदार्थ की,

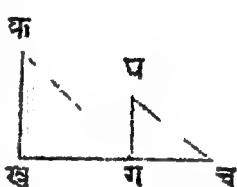
क ख, उंचाई ले आना. यथा, घ, पर खड़े होने से, किसी पदार्थ की, ख, चोटी देखती है, तो क्योंकि प्रकाश की किरण का पातन सदैव परावृत्ति कोण के तुल्य होता है इस



से यह आता है कि $\angle क ग ख = \angle घ ग च$ इसी से, क ख, ग, घ ग च, त्रिभुज सजातीय हैं इसलिये, ग च : घ च :: क ग : क ख.

$\therefore क ख = \frac{क ग \times घ च}{ग घ}$ अब मान लो कि मापने से, क ग = १००, ग घ = ६. और दृष्टि का उंचाई, घ च = ५ फुट आई तो, क ख पदार्थ की उंचाई = $५ \times १०० \div ६ = ८३ \frac{१}{३}$ फुट.

४. यष्टि वा, स्तंभ की छाया से किसी वृज की उंचाई लेना, यथा, क ख, वृज की उंचाई ख ग, छाया, ग घ, यष्टि की उंचाई, और ग च, छाया है तो सूर्य की, क ग, घ च, किरणें (जो छायाओं के सिरे बांधती हैं एक दूसरी के समान्तर हैं इससे यह आता है कि $\angle ख ग क = \angle ग च घ$, इसलिये, क ख ग, ग च घ, त्रिभुज सजातीय



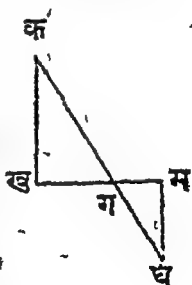
है, और $\therefore ग च : घ ग : ख ग : क ख \therefore क ख = \frac{ग च \cdot ग}{ग च}$

(उदा० १) जिस समय, १० फुट के बास की छाया ७ फुट थी, एक वृज की छाया, १४० फुट थी कहे उस की क्या उंचाई थी ?

यह ८ १० १४० क ख = २०० फुट

(२) पूर्ववत् उत्तर चाहिये जब ग घ = ५, ग च = ४, और, क ग = ६४ फुट है, — — — — — ३० ८० फुट

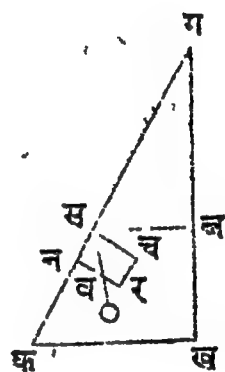
॥ किसी, क, पदार्थ की क ख दूरी, उस ले बिना गये ही लेना यथा, स्वस्तिक चश, वा वेधयंत्र से, क ख, पर, ख म, लंब डालकर, ख ग, ग म, कोई, उपयुक्त दूरी क लेलो; और, ग, पर भण्डा खड़ा करके, ख म, पर, म घ, लंब डाललो, और, घ, पर ऐसा भण्डा खड़ा करो कि वह, क, और, ग, को सीधे में होवे, अब, म घ, मापलो, तो $\angle ख ग क = \angle म ग घ$, और समकोण होने से $\angle ख = \angle म$, इसी से, ख ग क, ग म घ, त्रिभुज सजातीय है $\therefore ग म : म घ :: ख ग : क ख \therefore क ख = \frac{म घ \cdot ख ग}{ग म}$



(उदा० १) ख ग = ४०, ग म = २०, और, म घ = ६० फुट रखो तो २० ६० ४० क ख = १२० फुट.

(२.) क ख, दूरी चाहिये, जब, ख ग = ४, ग म = १, और, म घ = ३ जरीब है — — — — — उत्त० १२ जरीब, ६ किमी अगम्य, ख ग, पदार्थ की उचाई को क्षेत्रीयवर्ग नाम यंच से मापने का प्रकार ॥

क्षेत्रीयवर्ग, एक, न स च र, चौखटे का होता है जिन का हर एक, स च, च र, और, र न, भुज में १००, अंश चिन्हित होते हैं, तथा, स कोण से एक, सब सावल लटकता होता है और, न स, भुज पर दो देखने के लिये द्विद्र होते हैं जिन्हें के हेतु मापकजन, न स, भुज को पदार्थ की, ग, चोटी की सीध में रखते है इस यंच से पदार्थों की उचाई



सजातीय त्रिभुजों के लक्षण से अनायास ही आजाती है — यथा,

१. प्रकार — जब, सावल न र, भुज को काटता है;

स ज, को जित्तिज के समानान्तर और भूमि से यंच की उंचाई, ख ज, रखलो, और इस आधार रेखा, स ज तथा यंच की उंचाई, ख ज, को मापलो, अब, न, और, च, दृष्टि पथों को पदार्थ की, ग, चोटी की सीध में रख कर, न व, में के अंश गिनलो, तो, न व स, ग ज स, त्रिभुज सजातीय होंगे. क्योंकि, स व ग ख, के समान्तर है इससे $\angle न स व = \angle स ग ज$, तथा, समकोण होने से $\angle न = \angle ज$, $\therefore न व : न स :: स ज : ख ग$, $= \frac{न स \cdot स ज}{न व}$ और ख ग उंचाई $= \frac{न स \cdot स ज}{न व} + ख ज$.

(उदा० १): स ज = ६६, न व = २०, और, ख ज, = ४ फुट

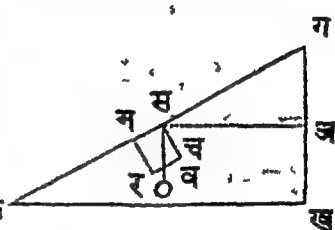
है, यहाँ $२० : १०० :: ६६ : गज$, $= ३३०$, और, ख ग $= ३३० + ५ = ३३५$ फुट

२. ख ग उंचाई चाहिये, जब कि ज स $= ६०$, न व $= ५०$, और यंच की उंचाई ख ज $= ६$ फुट है उ०—१२६ फुट.

२. प्रकार—जब, सावल च र, भुज को काटता है.

इस प्रकार मे स ज ग, स च व, चिभुज सजातीय है और इससे, यह आता है, ख ग $= \frac{च व स ज}{स च} + ख ज$

उदा० १. ज स $= ६६$



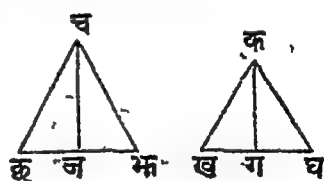
अ च $= ६०$, और, ख ज $= ५$ फुट

यहाँ, $१०० : ६० :: ६६ : गज$ $= ३६.६$ और \therefore ख ग $= ३६.६ + ५ = ४१.६$ फुट.

२. ख ग, चाहिये, जब कि, ज स $= १००$ व च $= ८०$, और, ख ज $= ५$ फुट है ————— उ० ८५.

१५ सा० प्र०—तुल्यकोण वा सजातीय चिभुजों की निष्पत्ति, उन्हें की सट्टश भुजाओं के वर्गों की निष्पत्ति के तुल्य होती है

यथा, क ख घ, च छ झ, तुल्य कोण, चिभुज, और उन्हे के क ग,



च ज, लंब है, अब, क ख ग, च छ ज, चिभुज भी सजातीय होंगे $\therefore \frac{ख घ}{क घ} = \frac{क ख}{च छ}$ और $\frac{क ग}{च ज} = \frac{क ख}{च छ}$

इन तुल्यों को आपस में गुण देने से $\frac{ख घ क ग}{क घ च ज} = \frac{क ख र}{च छ र}$ वा

$\frac{१ ख घ क ग}{१ छ झ च ज} = \frac{क ख र}{च छ र}$; अर्थात् $\frac{क ख घ जेच}{च छ झ जेच} = \frac{क ख र}{च छ र}$

और यह अनुपात की राह में लिखने से रेखा होवेगा क ख घ
 जेव : च छ भ जेव :: क ख^१ च छ^२ साधारण से वह
 मिट्ट हो मत्ता है कि सब सजातीय जेवों के फल एक दूसरे को
 होते हैं जैसे कि उन्हीं की सदृश भुजाओं के वर्ग^२ ॥

उदाहरण ॥

क ख ग, एक दिये त्रिभुज में से (१४. प्र० आकृ० देखो)
 ख ग के समान्तर, र म, रेखा में, क र म, एक भागछाटना
 है जिसका फल, क ख ग, की चौथई होवे, यहां, क ख ग
 जेव : र क म जेव : क ग^२ : क म^२ वा, $१ : \frac{१}{४} :: क ग^२ :$
 क म^२ $\therefore क म^२ = \frac{क ग^२}{४}$ और क म = $\frac{क ग}{२}$

वृत्तविषयक साध्य ॥

१६. सा० प्र०—वृत्त के, ग, केन्द्र से, क ख, जीवा के मध्य
 बिन्दु, ल, तक खिंची, ग ल, मरलरेखा
 उसी जीवा पर लंब होगी, ॥

यथा, ग ल क, ग ल ख, त्रिभुज ठीकर
 एकसे हैं क्योंकि, ग क = ग ख, ल क
 = ल ख, और, ग ल, उभयनिष्ठ है; इस-
 लिये, $\angle ग ल क = \angle ग ल ख$, अर्थात्, ग ल,
 क ख, पर लंब है.



* परि० सजातीय जेव वे होते हैं जिन्हें के क्रम से सब
 कोण एक दूसरे के तुल्य हों और तुल्य कोणों के पास की
 भुजा समनिष्पत्तिक होवें ॥

ग ल म, रेखा पर, ग ख म, लौटलिया जावे तो, ख, बिन्दु क, पर पड़ेगा, और ख म, चाप, ज म, चाप को ठाक लेगी. इस से यह आता है कि जो रेखा ज्या आधी २ करती है वह चाप को भी आधा २ करेगी,

इसका प्रतिलोम भी ठीक है अर्थात्, क ख, पर, ग ल लंब डाला जावे तो वह उसे आधा २ करेगा,

तथा ख म क, चाप भी, म, बिन्दु पर आधी २ होजावेगी क्योंकि, क ग = ख ग, इम से क ख ग, त्रिभुज समद्वि-बाहु है इसलिये $\angle ख = \angle क$, अब, ग ल क, ग ल ख, त्रिभुजो मे ल ग, उभयनिष्ठ है, ल, पर के ममकोण समान है, और $\angle ख = \angle क$, इसी से (३४. प्र०) ख ग ल, क, ग ल, शेष कोण भी तुल्य हैं इस से (१६. प्र०) यह आता है कि ये त्रिभुज ठीक २ एकसे है और इसलिये ख ल = क ल ॥

अनु० किसी, भी क ख ज्या का समद्विभाजक, ल ग, लंबवृत्त के, ग केन्द्र पर होकर जावेगा ॥

उदाहरण ॥

१. एक वृत्त की, क ग, त्रिज्या १०, और क ख, जीवा १६ है, ल ग लंब चाहिये ॥

यहां, क ल = $\frac{1}{2}$ क ख = $\frac{1}{2}$ १६ = ८; अब, क ग ल सम-कोण त्रिभुज से, ल ग^२ = क ग^२ - क ल^२ = १०^२ - ८^२ = ३६.
 \therefore ल ग = ६.

२. क ग = २०, क ख = २४, ल ग, चाहिये ॥ उ० १६.

३. क ग, त्रिज्या = १९, और ल ग = ६, क ख, चाहिये

उत्तर २४.

४. ल म, एर, वा उत्क्रमज्या = २, और, क ग विज्या = ५, क ख, जीवा चाहिये.

यहां ग ल = ग म - ल म = ५ - २ = ३;

अब, क ल = $\sqrt{५^2 - ३^2} = ४ \therefore$ क ख = २ क ल = २ × ४ = ८.

५. क ख, चाहिये जब क ग = ८ और, ल म = ३. उ० १० ४६.

६. क ग, बताओ क्या होगी, जब, क ख = ६४ और ल म = १६ है?

य = क ग, रखलो, तो, क ल = $\frac{1}{2} ६४ = ३२$, ग ल = ग म - ल म = य - १६. और \therefore क ग 2 = क ल 2 + ल ग, 2 वा, य 2 = ३२ 2 + (य - १६) 2 ; इस समी० को करने से, य = ४० आवेगा.

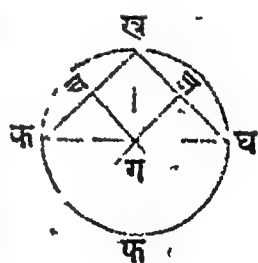
७. क ग, चाहिये, जब, क ख = ८, और ल म = २ फुट उत्तर १ फुट॥

१०. साध्य व०—क ख फ, दिये वृत्त का केन्द्र लाना वा निश्चित करना चाहिये ॥

क ख, ख घ, कोई दो जीवा खिंचकर उन्हें, च ग, ज ग, लंबों से आधा २ करलो, तो इन लंबों

का, ग, संपात बिन्दु वृत्त का केन्द्र होवेगा—

क्योंकि, पूर्व साध्य से, वृत्त का केन्द्र, च ग, रेखा में होगा, और उसी हेतु से वह, ज ग, रेखा में भी होगा; इसलिये वह, ग, संपात बिन्दु में होवेगा



१८. साध्य व०—क, ख, और, घ, तीन दिये बिन्दुओं में होकर एक वृत्त खिंचना चाहिये, (पूर्व आकृति देखो)

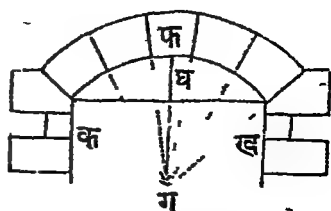
क ख, ख घ, रेखां से उन्हीं में से दो २ बिन्दो को जोड़ कर, च ग, ज ग, लंबों से उन रेखा को आधा २ करलो, तो, ग, संपातवृत्त का केन्द्र होगा ॥

अब, ग, केन्द्र और, ग क चिज्या से, क ख घ, वृत्त दिये बिन्दों में होकर खंचलो ॥

इस बस्तूपपाद्य के प्रयोग ॥

१. कोई महराव, वा गुम्मज निर्माण करना ॥

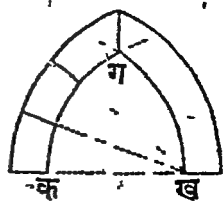
यथा, किसी महराव का, क ख, प्रादेश और, फ घ, लंब है, अब, पूर्व साध्य से, क, फ, और ख, दिये बिन्दो में होकर जाते हुए वृत्त का, ग, केन्द्र निश्चित करके, क फ ख, चाप के कई उपयुक्त तुल्य भाग करलो, और



इन भाग चिन्हों को ग, केन्द्र से जोड़ दो तो, इस से, महराव के पत्थरों के जोड़ आजायंगे और वे पत्थर पत्थर की आकृति होने से एक दूसरे को गिरने नहीं देंगे ॥

२. गाथिक नाम प्रकार की महराव बनाना ॥

यथा, क ख, महराव का प्रादेश है, तो, क, केन्द्र और, क ख चिज्या, तथा, ख, केन्द्र और ख क चिज्या से, ग, पर एक दूसरी को काटती हुई वृत्त चापें खींचकर, और, क - ग, ख ग, चापों के कितने ही तुल्य उपयुक्त भाग करके क ग, चाप के इन भाग

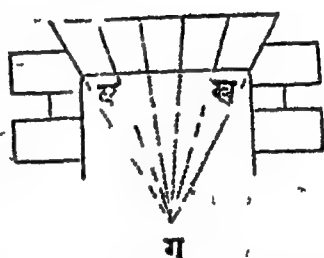


* गाथ देशवालों के प्रकार की ॥

चिन्हों को, ख, केन्द्र, और, ख ग, चाप के भाग चिन्हों को क, केन्द्र से मिलाने से, महाराव के पत्थरो के जुड़ाव आजविंगे ॥

३. कोई महाराव बनाना, जव, क ख, लदाव की दौड़ रेखारूप है,

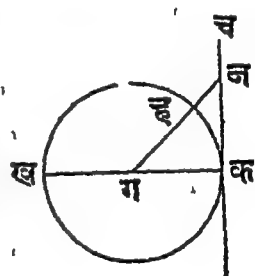
यथा, क ख, प्रादेश के कुछ तुल्य उपयुक्त भाग करके, और उस पर, क ख ग, समचि-
वाहु बनाकर रेखा जोड़दो तो इस प्रकार में पत्थरों के जोड़ की रेखा-
ओ का, ग, केन्द्र होगा.



५६ साध्य. प्र० — ग क, चि-

ज्या के छोर पर का, क च लंब वृत्त की, स्पर्द्धिनी होवेगा.

यथा, क च, में कोई, ज, बिन्दु लेकर उसे, ग, वृत्त केन्द्र से जोड़ दो तो, क्योंकि, ग क ज, एक समकोण त्रिभुज है इस का, ग ज कर्ण (४५. प्र० अनु० १). ग क, वा ग ह से बड़ा होगा और इसी से, ज बिन्दु वृत्त के बाहर होगा. अब क्योंकि यही, प्रक्रिया हर एक, क च, के बिन्दु के लिये होसکتो है.



इस से यह आता है कि यह रेखा केवल क, पर वृत्त को छूती है अर्थात् यह स्पर्द्धिनी है.

इस साध्य का प्रतिलोम भी ठीक है, अर्थात्, क च, वृत्त स्पर्द्धिनी होवे तो, क ग चिज्या इस परलंब होगी.

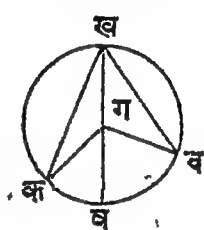
क्योंकि, क च स्पर्द्धिनी, क, स्पर्श बिन्दुको छोड़ कर सर्वथा वृत्त के बाहर है इस से, ज, बिन्दु वृत्त के बाहर होगा. और

हर एक, ग ज रेखा ग ह, वा ग क, चिज्या से बड़ी होगी. वा, ग, से, क च, तक जो रेखा खिंच सकेगी उन्हें में, क ग, सब से छोटी होवेगी और इसी से (२५ प्र०) ग क, क च, परलंब होगा.

६०. साध्य. प्र० — वृत्त के, ग, केन्द्र पर का हर एक, क ग

च, कोण पालिगत, एक ही चाप, क व च, पर के, क ख च, कोण से दुना होगा इस साध्य के दो प्रकार हैं.

पहिला वह है जिसमें, ग केन्द्र क ख च, कोण के भीतर है और दूसरा, जब केन्द्र उसके बाहर है



ख ग, को जोड़कर उसे, व, तक बढ़ा दो, अब, क ग ख,

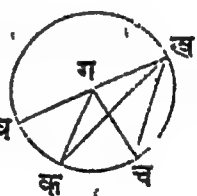
त्रिभुज समद्विबाहु है $\therefore \angle ग ख क =$

$\angle ग क ख$, परंतु ३४ प्र० से, बाहर का,

$\angle क ग व = \angle ग ख क + \angle ग क ख$,

$\therefore \angle क ग व = २ \angle ग ख क$, और

ठीक ऐसेही $\angle च ग व = २ \angle ग ख च$.



अब प्रथम प्रकार में इस साध्य को सिद्ध करने के लिये

तो इन समानों को जोड़ने से, $\angle क ग व + \angle च ग व = २$

$\angle ग ख क + २ \angle ग ख च$, $\angle क ग च = २ \angle क ख च$,

और दूसरे प्रकार में सिद्ध करने को, घटाने से, $\angle च ग व -$

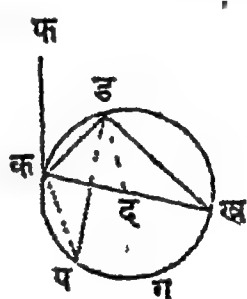
$\angle क ग व = २ \angle ग ख च - २ \angle ग ख क \therefore \angle क ग च$

$= २ \angle क ग च$.

अनु० १. ख क घ, ख च घ, आदि एक चापस्थ, समकोण समान है और ख घ, चाप के आधे से मापे जाते हैं; क्योंकि इन्हें में से हर एक कोण, ख ग घ, कोण के आधे के समान है.



अनु० २. क ड ख, अर्द्धवृत्त में का, क ड ख, कोण, समकोण है क्योंकि यह, क ग ख, चाप के आधे, का 90° के आधे = 45° से मापा जाता है.



अनु० ३. क, बिन्दु पर, क फ, वृत्तस्पर्द्धिनी होवे तो, क ड जीवा से कटा \angle ड क फ, कटी हुई क ड, चाप पर स्थित पालिगत \angle ख, के समान होगा.

क्योंकि, क ख, व्यास है इस से \angle फ क ख = समकोण, परंतु \angle ड क ख + \angle ख = समकोण, $\therefore \angle$ फ क ख = \angle ख + \angle ड क ख, इन दोनों तुल्यों में से \angle ड क ख, लेडालने से, \angle ड क फ = \angle ख.

पूर्वसाध्यों के प्रयोग ॥

१. क ड एक दी रेखा पर, क ड ख ग, वृत्त बनाना चाहिये जिस में ख, कोण एक दिये कोण के तुल्य होवे (पूर्व आकृ० देखो).

दिये कोण के तुल्य, ड क फ, कोण बनाती हुई, क फ, रेखा, तथा इस पर, क ख, लब खींच कर, ड क ख, के तुल्य, क ड द कोण बनाता हुआ ड, से ड द, लब खींच लो, तो आकांचित वृत्त का, द, केन्द्र होगा (६० प्र० अनु० ३) ॥

२. क, और ड, दो पदार्थों में ३ मील दूरी है (पूर्व आकृ० देखो)।

और एक मापक ने, क प ड कोण ($= 85^\circ$) जो दोनों पदार्थ, प, स्थान से बनाते हैं लेकर, प ड ($= 8$ मील) मापी.

अब निर्माण से, क, पदार्थ से उसकी दूरी चाहिये.

उत्त० प क = १.८ वा क ख = ३.८ मील.

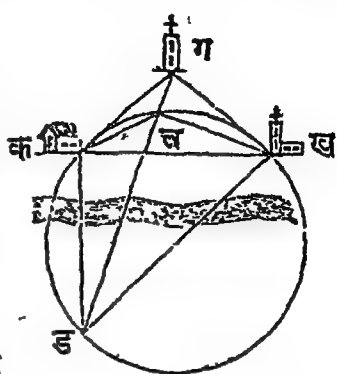
यथा, समभाग की माप से, क ड = ३ लेकर पूर्व उदाहरण की रीति से एक क ग ख ड, वृत्त बनाओ जिसमें, क प ड कोण $= 85^\circ$ होवे, अब, ड केन्द्र से, मापके ४ भाग के तुल्य चिज्या से, क ग ड, वृत्त को, प, और ख, में काटता हुआ एक वृत्त खींचकर, प क, को जोड़ दो तो यही आकांचित दूरी होवेगी यहाँ स्फुट है कि ड, केन्द्र पर बना वृत्त, क ग ड वृत्त को, प, ख, दो बिन्दों में काटेगा, इसी से प्रश्न के दो उत्तर होसकते हैं.

अर्थात् प क वा ख क, दूरियों से प्रश्न का नियम पूरा होता है* ॥

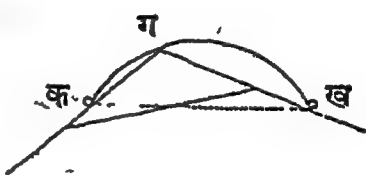
३. क, ख, ग, तीन पदार्थों की एक दूसरे से दूरी, क ख = १२, ख ग = ७.२ और क ग = ८ मील है और एक, ड, स्थान से, ख ड ग $= 25^\circ$ तथा, ग ड क $= 95^\circ$ के कोण देखे गये हैं कहो, ग ड दूरी क्या होवेगी ?

* इस प्रश्न के डाल का एक और प्रकार है ॥

क ख ग, त्रिभुज, बनाकर, \angle क ख च = 95° अर्थात् \angle ग ड क के तुल्य बनाती हुई, ख च, रेखा खींचो, ऐसी ही क, से \angle ख क च = 29° अर्थात् \angle ख ड ग, के तुल्य बनाती हुई, क च, रेखा खींचो, और, क, ख, च, तीन बिन्दुओं में होकर, (प्र० १८) क ड ख च, वृत्त बनाओ, अब, ग च, को जोड़ कर उसे बढ़ादो कि वह, ड, बिन्दु पर वृत्त को काटे, तो यही वह स्थान होगा और ड ग, आकांक्षित दूरी = १५ मील होगी. क्योंकि ६० प्र० से \angle क ख च = \angle क ड च और \angle ख क च = \angle ख ड च ॥



४. क, ख, ग, तीन चिन्हों में होकर, केन्द्र के बिना ही निश्चित किये एक वृत्त चाप खैची चाहिये.

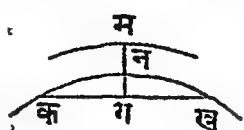


क, ख, स्थानों पर दो कीलें जमा कर और, क ग, ख ग, दो लगियां लेकर, आकृति की रीति पर जमा दो अब, इस तिखुंटे ढांचे को आस पास इस रीति से फिराओ कि, क ग, ख ग भुजों का दबाव निरन्तर, क, ख, कीलों पर रहे, तो, ग, सिरे पर, लगी पेन्सिल, आकांचित वृत्त बनावेगी * ॥

* कारीगर बहुधा इसी रीति से वृत्त बनाते हैं जब कि चिज्या बहुत बड़ी होती है ॥

५. किमी, क न ख, महगव के, न म जोड़ के, वृत्त केन्द्र के बिना ही जाने, निश्चित कर लेना ॥

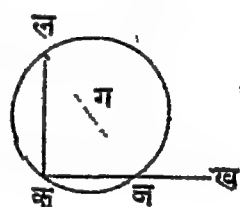
दिये, न बिन्दु के दोनों ओर न क = न ख लेकर, और, क ख, खेंचकर उमे, ग न



म लंब से (२२. प्र०) आधा २ कर लो, तो, महाराजी पत्थर का, म न, आकाक्षित जोड़ होवेगा. क्योंकि म ग अवश्य केन्द्र को जायगी, ॥

६ क ख, टी रेखा पर, क, सिरे से, क ल, लंब डालना चाहिये किसी, ग, बिन्दु के केन्द्र, और, ग क, के समान चिज्या

से, क ल ज वृत्त बनाओ, जो, क ख, को, ज, बिन्दु में काटे, और ग ज, को जोड़कर बढा दो कि यह उस वृत्त को, ल, चिन्ह पर काटे अब, क ल, जोड़ देने से यही आकाक्षित लंब



होगा क्योंकि ल क ज, अर्द्धवृत्त होगा, और इसी से, \angle क समकोण होगा अर्थात्, क ल, लंब होगा ॥

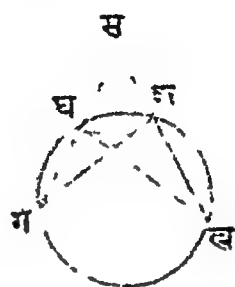
६१ सा० प्र०— दो रेखा, वृत्त के भीतर, वा बाहर, स बिन्दु पर संपात करे तो एक के खण्डों का घात दूसरी के खण्डों के घात के तुल्य होगा, अर्थात् ख स. क स = स ग. स घ ॥

क ग, ख घ, जोड़ दो तो, दोनों क्षेत्रों में, स घ ख, स ग क, त्रिभुज सजातीय होंगे, क्योंकि, ६० प्र० अनु० १ \angle ग = \angle ख और एक का \angle स = दूसरे के \angle स इसी से शेष \angle स घ ख = शेष \angle स क ग, इसी से ५४. प्र० से स ख : स ग :: स घ : स क \therefore स ख स क, = स ग. स घ. ॥

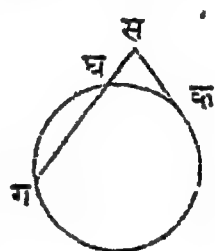


अनु० १. पहिली आकृति में, ग क घ अर्द्धवृत्त होवे तथा,

ग घ, पर, क स लंब होवे तो, क स
= क स और \therefore क स^२ = स ग.
स घ, अर्थात् अर्द्धवृत्त में, क्रम क का
वर्ग आबाधाओं के घात के तुल्य होता है ॥



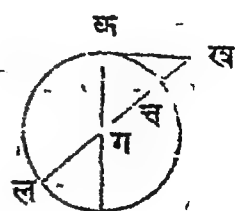
अनु० २ दूसरी आकृति में, स ख,
रेखा को, स बिन्दु पर घूमने दो कि
वह इस पिछली आकृतिवत् वृत्त को स्पर्श करे तो, क ख, भाग
लुप्त होजायगा और, स ख, स क इस प्रकार
मे, स क^२ होजायगा. इसी से, स क^२ =
स ग स घ; अर्थात्, वृत्तस्पर्द्धिनी का
वर्ग, संपूर्ण वृत्त खण्डनी और उस के वृत्त
वर्द्धित खण्ड के घात के तुल्य होता है ॥



पूर्वोक्त विशेष गुणों के प्रयोग ॥

१. समस्यता, अर्थात् भूमि की उंचाई निचाई देखने में
पृथ्वी की गोलाई के अश का शोधन ॥

यथा, समस्य रेखा को, क ख सीध है, जो, क, से ली गई
है तो, क ख, भूषण की, क, पर स्पर्द्धि-
नी होगी और इसी से भू का, ग, केन्द्र
होवे तो क ग, पर, क ख लंब होगा,
अब, ग, केन्द्र में हो, ख ल खचलो
तो, क-च, ठूरी में सत्य वा ठीक और
आभासित समस्यताओं में, च ख, माच



की विचल पड़ेगी परंतु २५५० से, ख ल. ख च = क ख.^२

$$\therefore \text{ख च} = \frac{\text{क ख}^2}{\text{ख ल}} \parallel$$

परंतु सब यथाथे भूमि की मापों में भूव्यास को अपेक्षा ख च, अतिसूक्ष्म है इस से, ख ल, को च ल के तुल्य मानने में कुछ विशेष अन्तर नहीं पड़ता और उसी हेतु से क ख, क च, के सदृश मानी जा सकती है अब, व = च ल

भूव्यास (८६६० मील के लगभग) मानलो तो, ख च = $\frac{\text{क ख}^2}{\text{व}}$.

यहां, क ख, एक मील मानी जावे तो ख च = $\frac{1}{8660}$ मील = प्राय ८ इंच. इसी से हर एक, माप के एक मील के लिये ठीक समस्यता वा भूगुण, आभासित समस्यता से ८ इंच नीची होगी ॥

२. निश्चित करना कि कितनी दूर से समुद्र पर पदार्थ देख पड़ेगा. ख च, पदार्थ की उचाई = ल, और, क ख, दूरी = रखलो, तो पूर्ववत् व. ख च = क ख^२ वा, व. ल = द, $\therefore \text{द} = \sqrt{\text{व ल}}$ ॥

उदा० १. समुद्र की पृष्ठ से, टेनीरिफ नाम पहाड़ की चोटी द, प्राय २ $\frac{1}{2}$ मील जंची है कहो वह कितनी दूर तक दीख पड़ेगी ?

$$\text{यहां ल} = २\frac{1}{2} \quad \therefore \text{द} = \sqrt{८६६० \times २\frac{1}{2}} = १४१ \text{ मील } \parallel$$

उदा० २. एकबुर्ज की चोटी २५ मील से दीख पड़ती है कहो वह कितना जंचा होगा? — — — — उत्त. ४१४ फुट ॥

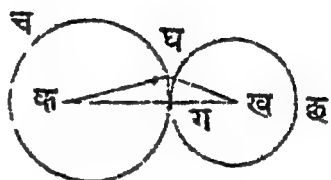
उदा० ३. समुद्र की पृष्ठ से ८० फुट जंचे जहाज़ के ऊपरी मस्तूल पर से, कितनी दूर से टेनीरिफ की चोटी दिखाई देगी?

उत्त० १५२.०४ मील.

उदा० ४. समुद्र की पृष्ठ से १ मील ऊँचा पहाड़ ८६ मील से दीख पड़ता होवे तो भूमि का व्यास क्या होवेगा ?

उत्तर ७६२१ मील.

६२. सा० प्र०—दे वृत्तों के, क, और, ख केन्द्रों की दूरी क, ख, क ग, ग, उन्हीं की चिज्याओं के योग के तुल्य होवे तो वे वृत्त एक दूसरे को बाहर से स्पर्श करेंगे ॥



यथा, प्रकट है कि ग, बिन्दु में होकर वृत्त जावेंगे पर उन्हीं

का उभयनिष्ठ और कोई बिन्दु नहीं होगा क्योंकि, क, वृत्त की पालि में कोई घ, बिन्दु लेलो और, क घ, ख घ मिला दो, तो, क ख घ, त्रिभुज में, क घ + से, घ, भुजा से क ख, भुज छोटी होगी इन असमानों में से, क घ, वा क ग लेडालो तो, ख ग, से ख घ बड़ी होगी अर्थात् घ, बिन्दु निश्चय, ख, वृत्त के बाहर ही होगा. और, क, वृत्त में और हर एक बिन्दु की यही दशा स्पष्ट होसकी है इसलिये ये वृत्त एक दूसरे को केवल, ग, बिन्दु पर मिलेंगे अर्थात् वे उस बिन्दु पर एक दूसरे को स्पर्श करेंगे ॥

६३ सा० प्र०—दो वृत्तों के क, और, ख, केन्द्रों की दूरी, क ख, क घ, ख घ, चिज्याओं के अंतर के समान होवे, तो वे वृत्त एक दूसरे को भीतर से स्पर्श करेंगे ॥



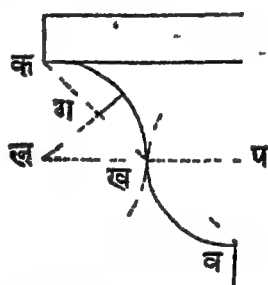
पूर्वसाध्य की रीति से, घ छ, छोटे वृत्त की पालि में एक, ग बिन्दु लेकर, ख ग, क ग, जोड़ दो नो क, ख ग,

त्रिभुज में, क ख + ख ग, भुजाओं के योग से, क ग, छोटी होगी। परंतु ख ग = ख घ इससे, क ख + ख ग = क घ; और इसी से, क घ, से, क ग, छोटी होगी अर्थात् ग, बिन्दु घ च, बड़े वृत्त के भीतर ही होगा और हर एक छ घ छोटे वृत्त में के बिन्दु की यही दशा स्पष्ट होसती है इसलिये ये वृत्त केवल एक ही, घ, बिन्दु पर, स्पर्श करेंगे ॥

उक्त दोनों साध्यों के प्रयोग ॥

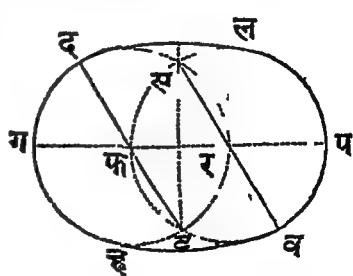
१. लहरिया, वा सर्पगति खींचने का प्रकार,

यथा, क व, को जोड़कर, ख बिन्दु से आधी २ करलो और, ल ग, लंब से, क ख, को आधा २ करके लंब, के किसी मनमाने ल, बिन्दु को केन्द्र मानि, ल ख, चिज्या से, क ख, चाप बनालो तथा, ल ख, जोड़ कर उसे बठा दो कि ख प = ख ल होवे अब, प, केन्द्र और, प ख, चिज्या से, ख व, चाप बनालो, तो ६२ प्र० से प्रकट है कि, ख बिन्दु पर वृत्त एक दूसरे को स्पर्श करेंगे और इसी से, क ख व, लहरिया एक ही वक्र रेखा में होगा ॥



२. ग व पद० एक अण्डाकृति बनाना चाहिये, यथा, ग प, दीर्घ व्यास के, ग, और फ, चिन्हों से

तुल्य तीन खण्ड करके उन चिन्हों को केन्द्र मान कर क्रम से, ग द ह, प व ल, वृत्त एक दूसरे को स, और, ट, चिन्हों पर काटते हुए बनालो अब, फ ट, जोड़

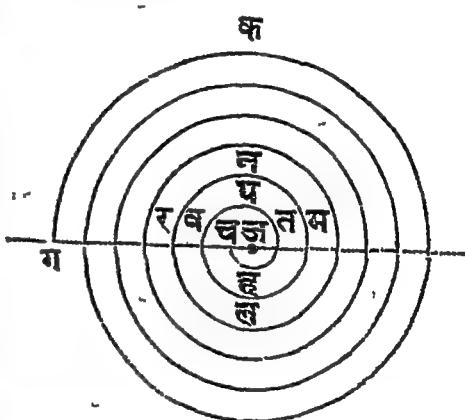


कर बड़ा दो कि वह, ग द ह, वृत्त को, द बिन्दु में काटे, और ट, केन्द्र पर, ट द, चिज्या से, द ल, चाप बनाओ तथा इसी रीति से स केन्द्र पर, वह चाप भी बनालो; ये बनाई गई चापे प्रगट है कि एक दूसरे को द, ल, व, और, ह चिन्हों पर स्पर्श करेंगी.

ऐसे ही, ग प, के चार समान भाग करने से और भी अधिक आयत अण्डाकृति बन सकती है ॥

३. ग क ल, एक कुण्डलना वा भौरी बनानी चाहिये यथा, ज, कुण्डलना की नाभी और, च ज = ज त, सब

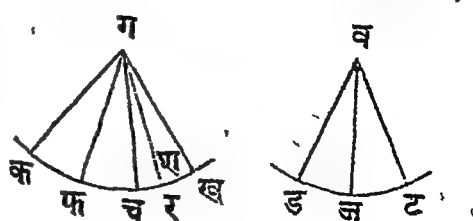
से छोटे, च ह त, अर्द्धवृत्त की चिज्या मानकर, ज, केन्द्र पर, ज च दी चिज्या से, च ह त, अर्द्धवृत्त बनाओ फिर च, केन्द्र पर, च त, चिज्या से, त प व, अर्द्धवृत्त बनाओ, अब, ज, केन्द्र पर, ज व, चिज्या से, व ल



म, अर्द्धवृत्त बनाओ, इत्यादि चाहो जहां तक बढ़ाते चले जाओ केवल, ज, और, च, को क्रम से केन्द्र मानने पर ध्यान रखो ॥

६४. सा० प्र० — एक, वा तुल्यवृत्तों में, क ग ख, और, ड व, ट केन्द्र पर के कोण, निज, क ख, ड ट, चापों के सम्बन्ध में होते हैं.

यथा, क ख ग, और, ड व ट में, ३ और २ की



निष्पत्ति मानलो और, \angle क ग ख, के, ग फ, ग च रेखाओं से तुल्य तीन, तथा, \angle ड व ट, के, व ज, से तुल्य दो भाग करने तो \angle क ग फ = \angle ड व ज, और क ग फ, ड व ज, वृत्त खण्ड एक दूसरे के तुल्य होंगे तथा, क फ चाप भो = ड ज, चाप, इत्यादि (१३ प्र०). इसी से \angle क ग ख, का \angle ड व ट, से वही सबन्ध होगा जो, क ख, चाप का ड ट, चाप से है ॥

अर्थात् \angle क ग ख = $\frac{\text{क ख चाप}}{\text{ड ट चाप}}$ वा, अनुपात के स्वरूप में, \angle क ग ख \angle ड व ट = क ख चाप ड व. चाप. * ॥

८५. सा० व०—दिये वृत्त के एक अन्तर्गत वर्ग के चरखे चा चाहिये,

ख घ, क ग, दो व्यास, एक दूसरे पर लंब डाल कर, क, ख, ग, घ, बिन्दु जोड़ दो तो क ख ग घ, आकाक्षित, वर्ग होगा, ॥



क्योंकि, क ख च, और, क घ च

त्रिभुजों में, ख च = घ च, क च उभयनिष्ट और \angle ख च क

कोण भिन्न परिमेय होंगे तो ड व ट, छोटे कोण को बड़े कोण पर रखो कि \angle क ग च = \angle ड व ट, और क च चाप = ड ट चाप, अब पूर्वोक्त साध्य सत्य न होंगे तो \angle क ग ख : \angle ड व ट = क ख, चाप : क ग, चाप; अब क ख, चाप के कितने ही तुल्य भाग, जो च श, से हर एक छोटा हो मानलो, तो कम से कम, च और श के बीच में भाग का एक, र, बिन्दु तो होगा, इसी से उक्त साध्य से \angle क ग ख : \angle क ग र :: क ख, चाप : क र, चाप, अब इन दो अनुपातों में, अगसर

= \angle घ च क, समकोण होने से इसलिये ये त्रिभुज समान है, और, क ख = क घ, इसी रीति से यह भी सिद्ध हो सक्ता है कि क घ = घ ग = ग ख, तथा, ख क घ, अर्द्धवृत्त है (६०प्र०) इस से \angle ख क घ 'समकोण' है, इसी से, क ख ग घ वर्ग है.

क घ, घ ग आदि चापो को, आधा २ कर भाग चिन्हों को जोड़ देने से वृत्तान्तर्गत अष्टभुज खिंच सक्ता है ॥

अभ्यासार्थ प्रश्न ॥

१ वृत्त की चिज्या = ३, है कहो उसके अन्तर्गत वर्ग क्षेत्र की भुजा क्या होगी ?

यहां, क च ख, समकोण त्रिभुज से, क ख^२ = ख च^२ + क च^२ = २ च^२; \therefore क ख = $२\sqrt{२}$,

२ वृत्त की चिज्या = ४, है कहो अन्तर्गत वर्ग का क्षेत्रफल क्या होगा ? --- --- --- उत्त० ३२.

३ अन्तर्गत वर्ग का क्षेत्रफल = १८; वृत्त का व्यास चाहिये --- --- --- उत्त० ६.

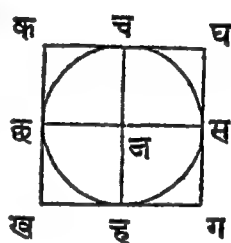
एक ही है $\therefore \angle$ ड व ट \angle क ग र :: क श, चाप : कर चाप, यहां क र, चाप से क श, चाप अधिक है और इसी से यह अनुपात सत्य होवे तो, \angle ड व ट, \angle क ग र, से बड़ा चाहिये परंतु ऐसा तो नहीं है वरन, वह उस से छोटा है इस से यह आता है कि \angle क ग ख : \angle ड व ट :: क ख, चाप : क च से बड़ी एक क श चाप, इसी रीति से यह भी सिद्ध होसक्ता है कि अनुपात की पिछली राशि, क च, से छोटी नहीं होसक्ती इस से आता है कि, क च आप ही चौथी राशि होगी, वा, \angle क ग ख : \angle ड व ट :: क ख, चाप : ड ट चाप ॥

६६. सा० व० — दिये वर्ग के उपरिगतवृत्त बनाना चाहिये, (पिछला ज्ञेय देखे।)

यथा, क ख ग घ, दिया वर्ग है, तो क ग, ख घ, कर्ण एक दूसरे को, च बिन्दु पर काटते हुए खैचलो, अब ये कर्ण आपस में समद्विभाजित हो जायेंगे और च क = च घ = च ग = च ख, इसी से आकाक्षित बहिर्गत वृत्त का, च, केन्द्र होगा ॥

६७ सा० व०—दिये वृत्त पर वर्गज्ञेय बनाना चाहिये,

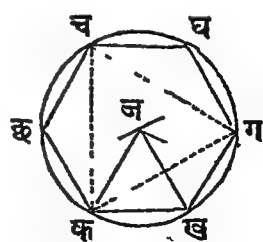
यथा, छ स, च ह, दो व्यास एक दूसरे पर लंबरूप डालकर, छ, ह, स, और, च, चिन्हों में होकर क ख, ख ग, ग घ, और घ क वृत्तस्पर्द्धिनी खैचलो तो, क ख ग घ, आकाक्षित वर्गज्ञेय होवेगा ॥



तथा, क ख ग घ, दिये वर्ग में वृत्त खैचना होवे, तो वह वृत्त, च छ ह स, ही होवेगा ॥

६८ साध्य व०—एक दिये वृत्त में समषड्भुज बनाना चाहिये ॥

साध्य सिद्ध हुआ मानलो जैसा क ख ग घ, आदि अन्तर्गत पडस है, और, क ज, ख ज, चिज्या खैचलो अब \angle क ज ख = 360° का $\frac{1}{6}$ = 60° , और क ज = ख ज, इस से \angle ज क ख = \angle ज ख क, और क्योंकि त्रिभुज के सब कोणों का योग = 180° होता है इस



सहज ही दृष्टि आता है कि \angle ज क ख, वा \angle ज ख

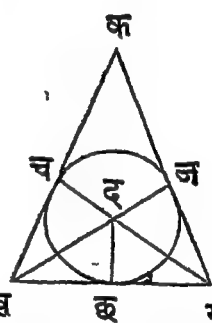
क = 60° ; इसलिये, क ख ज, त्रिभुज समत्रिबाहु है और इसी से वृत्तान्तर्गत समषडस्र की भुज = वृत्त की चिज्या ॥

अनु० १ — 60° की जीवा, चिज्या के समान होती है ॥

अनु० २ — क, ग, च, बिन्दुओं के जोड़ देने से प्रकट है कि वृत्तान्तर्गत सम त्रिभुज बनजायगा ॥

अनु० ३ — समबहुभुज, तुल्य भुज और तुल्य कोण भी होते हैं यथा $\angle क = \angle ख$ इत्यादि ॥

६६. सा० व०—एक दिये त्रिभुज के अन्तर्गतवृत्त बनाना चाहिये, यथा, क ख ग दिया त्रिभुज है, अब, ख ग क, और, ग ख क, कोणों को (२१ प्र०) द, चिन्ह पर मिलती हुई, ग द, ख द, रेखाओं से आधा २ करलो और, द, से, ख ग, पर, छ द, लंब डाललो, तो यही, द छ, अन्तर्गतवृत्त की चिज्या होवेगी. ख छ ग



क्योंकि, ख क, और, ग क, पर, द च, द ज, लंब डाललो, तो, ख द छ, और ख द च, त्रिभुज समान होंगे इसी से, द च = द छ इसी रीति से यह भी स्पष्ट होसक्ता है कि, द ज = द छ, इसलिये, द, केन्द्र और द छ, चिज्या से बना वृत्त, छ, च, और, ज चिन्हों में होकर जावेगा, और ५६ प्र० से वह इन चिन्हों पर त्रिभुज की भुजों को छुएगा. ॥

अभ्यासार्थ प्रश्न ॥

१. अन्तर्गतवृत्त की चिज्या द छ = च तथा, ख ग, भुज = का, ख क = गा और, क ग = खा है अब त्रिभुज के क्षेत्रफल का स्वरूप चाहिये ॥

यहां, क ख ग, त्रिभुज तीन त्रिभुजों का अर्धात् ख ग द, ग द क, ख क द, का बना है और ख ग द क्षेप = का $\times \frac{3}{2}$; ग द क क्षेप = खा $\times \frac{3}{2}$, ख क द क्षेप = गा $\times \frac{3}{2}$.
 \therefore क ख ग क्षेप = का $\times \frac{3}{2}$ + खा $\times \frac{3}{2}$ + गा $\times \frac{3}{2}$
 $= (का + खा + गा) \frac{3}{2}$.

२. एक समकोण त्रिभुज की भुज कोटि क्रम से, ८ और ६ है अंतर्गतवृत्त की चिज्या चाहिये ... उत्तर २.

३. एक समकोण त्रिभुज के भुज कर्ण क्रम से, १८ और ३० है, अंतर्गतवृत्त की चिज्या निश्चित की चाहिये ... उत्तर ६.

७०. सा० प्र० — हर एक सम बहुभुज के बाहिर्गत वा अंतर्गतवृत्त, और वृत्त के अंतर्गत वा बाहिर्गत बहुभुज, खिंच सक्ता है ॥

क ख ग घ, आदि एक सम बहुभुज लेलो, ख, ग, और घ, तीन बिन्दुओं में होकर (५८ प्र०) एक वृत्त बनाओ जिस का, द, केन्द्र और, ख ग, ग घ, जीवाओं के मध्य बिंदु ख, ग, होवे, और, द ख, द घ, को जोड़लो, अब, द ग' घ च, चतुर्भुज, द ग' पर लौटाया जावे, तो यह ठीकर



द ग' ग ख, चतुर्भुज को ठीक लेगा, और इसी से, द च = द ख, अर्थात् वह वृत्त बहु भुज के, च बिंदु पर भी होकर जावेगा,

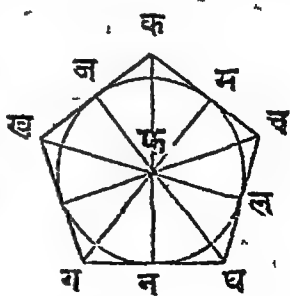
तथा ठीक २ इसी रीति से यह भी सिद्ध हो जायगा कि ग, घ, और च, चिन्ह में होकर खिंचा वृत्त, पास के क, बिंदु पर भी होकर जावेगा जो बहुभुज का एक कोण है, इत्यादि और भी.

तथा, ख ग, ग घ, घ च आदि सब समान ही जीवा हैं इस से, द ख', द ग', द घ' आदि लंब भी समान होंगे और इसी से, द केन्द्र पर, द ख', चिज्या से बना वृत्त उन जीवाओं को, ख', ग', घ' आदि चिन्हों में छुरगा, अर्थात् बहु भुज के अंतर्गत वृत्त बन जायगा।

तथा, ख द ग, ग द घ, आदि सब कोण एक दूसरे के समान और इसी से इन्हें मे से हर एक, 360° का बहुभुज की भुज संख्या के तुल्यवां अंश होगा इसी से किसी दिये वृत्त में कोई बहुभुज बनाने को उस बहुभुज की भुज संख्या के तुल्य वृत्त की पालि के खण्ड मिले चाहियें और फिर इन भाग चिन्हों को जोड़ देने से आकांक्षित बहु भुज बन जावेगा, तथा घर्हिगत बहुभुज बनाना होवे तो उन चिन्हों से वृत्त स्पर्द्धिनी खेंचनी चाहियें।

७१. सा० प्र० — सम बहुभुज का क्षेत्रफल, सीमा सूत्र वा (भुजाओं के योग) और अंतर्गतवृत्त की आधो चिज्या के घात के तुल्य होता है।

यथा, अन्तर्गतवृत्त की चिज्या, फ ज, है, तो, फ ख क, त्रिभुज का क्षेत्रफल = क ख $\times \frac{1}{2}$ फ ज, अब, बहुभुज की भुजाओं की संख्या, स, होवे तो उस में, फ ख क, के समान, स त्रिभुज होंगे \therefore बहुभुज का क्षेत्रफल = स \times क ख $\times \frac{1}{2}$ फ ज, परन्तु स + क ख =



सीमासूत्र \therefore बहुभुज = $\frac{1}{2}$ फ ज \times सीमासूत्र ॥

७२. सा० प्र०—दो, एकही संख्या की भुजाओं के सम बहुभुजों के सीमासूचों में उन क्षेत्रों के वहिर्गत वृत्तों की चिज्याओं की निष्पत्ति होती है ॥

तथाउन्हों के क्षेत्रफलों में चिज्याओं के वर्गों की निष्पत्ति होती है ॥

यथा वहिर्गत वृत्तों के, द, और, घ, केन्द्र मानलो तो,

ग द ख, म, घ ल चि-

भुज सजातीय होंगे,

और \therefore ख ग : ल

म :: द ख : घ ल अब

प्रत्येक बहुभुज की

भुजसंख्या, स, होवे

तो प्रथम, और दूसरी इस अनुपात की राशियों को, स, से गुण देने

से, स \times ख ग म \times ल म द ख : घ ल, अर्थात् क ख ग घ,

आदि बहुभुज के और, ट ल म न, आदि बहुभुज के सीमासूचों

में वही निष्पत्ति है जो द ख, और, घ ल, चिज्याओं में

है इसी रीति से यह भी सिद्ध होसता है कि सीमासूचों की

निष्पत्ति अन्तर्गत वृत्तों की चिज्याओं की निष्पत्ति के तुल्य होती है ॥

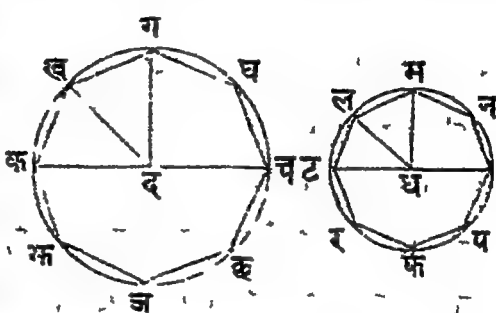
तथा ५५. प्र० से, ट के ख क्षेत्रफल : घ ट ल क्षेत्रफल

: क द^२ : ट घ^२, अथवा, स \times क ख ट क्षेत्र स \times ट

ल घ क्षेत्र :: क द^२ : ट घ^२. अर्थात् क ख ग घ आदि बहुभुज

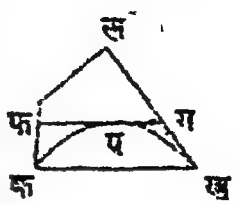
का क्षेत्रफल जैसा, ट ल म न आदि बहुभुज के क्षेत्रफल का है

जैसा ही, क द^२ : ट घ^२ का है ॥



७३. सा० प्र० — क प ख, उन्नतवक्रा से, क ख, क्या छोटी है और क ल ख कुटिल रेखा, उन्नतवक्रा से जिसे वह आवृत करती है बड़ी है ॥

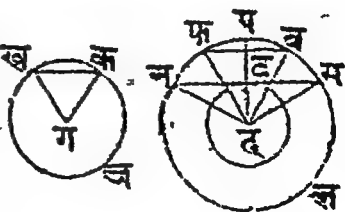
प्रथम, क्योंकि, क ख, सरल रेखा है इसी से, क और ख, के बीच में जितनी रेखा खिंच सकेंगी उन सभी से अर्थात् क प ख से भी वह छोटी होवेगी ॥



तथा, क प ख, किसी रेखा से, जो उसे आवृत करती है छोटी न होगी तो उन सभी में, कोई, क ल ख, रेखा और सभी से छोटी होवेगी ॥

अब वक्रा को, प, बिन्दु पर खूती और, क ल, ख ल, को, फ और, ग चिन्हों में काटती हुई, फ ग, सीधी रेखा खिंचलो तो क्योंकि, फ ल ग, से फ ग, छोटी है इस से यह आता है कि, क फ ल ग ख, से, क फ ग, ख, अवश्य छोटी होवेगी परंतु पूर्व अनुभव से यह सब से छोटी मानी थी सो असंबद्ध है इसलिये वह पूर्व अनुभव मिथ्या है और इसी से क प ख, उन्नतवक्रा से उस की आच्छादक रेखा बड़ी होवेगी ॥

७४. सा० प्र०—वृत्तों की परिधि एक दूसरे प्रति वैसी ही होती है जैसी उन्हो की चिज्या, अर्थात् ग क वृत्त परि. : द फ वृत्त ख परि. :: ग क . द फ. यह साध्य ठीक न होवे तो, ग क : द फ :: ग क वृत्त परि. : द फ से छोटे वाड़े वृत्त की परि. ॥



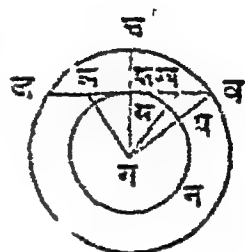
अच्छा पहले छोटा मान लो और समझ होवे तो, क ग, : फ द :: ग क वृत्त परि. : द ट वृत्त परि. रख लो अब, द ट, वृत्त को, ट, विन्दु पर डूती हुई, न म रेखा खींच कर, द ट को, प, तक बढ़ा दो, और इस वृत्त का, प ल, वृत्त पाद लेकर प ल, का आधा, आधे का आधा बत्थादि लेते जाओ कि जब तक, प व, चाप प म से छोटी रह जावे, तथा द प, पर, व फ लंब डाल लो तो प्रकट है कि, फ व, एक अन्तर्गत समबहुभुज की भुजा होवेगी. अब, ग क वृत्त के अन्तर्गत उतनी ही भुजा के बहुभुज की एक भुजा क ख, रेखा लो, तो ०२. प्र० से, क ख, बहुभुज का सीमा सू० : फ व, बहुभुज का सीमा सू० :: ग क : द फ परंतु पूर्व अनुभव से ग क : द फ : ग क वृत्त परि. : द ट वृत्त परि. . क ख बहु भु० सीमा. : फ व बहु भु० सीमा. :: ग क वृत्त परि द ट वृत्त परि. परन्तु यह अनुपात असंगुह्य है क्योंकि (०२प०) क ग वृत्त परि. से, क ख बहुभुज सीमासू० छोटा है, और द ट वृत्त परि. से, फ व बहुभुज सीमासू० बड़ा है इसी से, ग क का, द फ प्रति होना जैसी कि ग क वृत्त परि. द फ वृत्त परि. से छोटी पालि को है यह असंभव है.

टीका २ इसी रीति से यह भी सिद्ध हो जायगा कि, द फ का ग क प्रति होना जैसी, द फ वृत्त परि. ग क वृत्त परि. से छोटी पालि को है सो भी असंभव ही है वा एक ही बात आयड़ेगी कि ग क, कभी द फ प्रति नहीं होसकती जैसी, ग क वृत्त परि. द फ से बड़े वृत्त की पालि को है ॥

अब, दृष्ट अनुपात की चौथी राशि द फ वृत्त परि. से न तो छोटी न बड़ी दो मे से एक भी नहीं हो सकती इस को सिद्ध हो

माने से, यह सिद्ध होजाता है कि ग क : ठ फ :: ग क वृत्त
परि : ८ ज वृत्त परि. ॥

७५. सा० प्र० - वृत्त का क्षेत्रफल, उस की पालि और
आधी चिज्या के घात के समान होता है,
अर्थात् ग च वृत्त के० फ० = ग च वृत्त
पालि' $\times \frac{1}{2}$ ग च.



क्योंकि ग च वृत्त परि. $\times \frac{1}{2}$ ग च,
जिसकी ग च चिज्या है उनके क्षेत्रफल
के समान न होवे तो यह किसी और
छोटे या बड़े वृत्त के क्षेत्रफल के समान होगा. ॥

अच्छा पहले एक छोटे वृत्त के जिसकी चिज्या, ग फ है,
क्षेत्रफल के तुल्य मानलो, अर्थात् हो सके तो, ग च वृत्त,
परि. $\times \frac{1}{2}$ ग च = ग फ वृत्त के० फ० रखलो ॥

अब, फ, बिन्दु पर, जब सार्द्धिनी खैचकर, ग व जोड़ दो जो,
प, बिन्दु पर, ग फ वृत्त को काटे, और, ग फ, वृत्त का, फ
न, वृत्त पाद लेकर उसका आधा, आधे का आधा करने जाओ
जबलों एक फ म चाप, फ प, से छोटी रह जावे, और फ क =
फ ख, ले लो, तो, ग फ वृत्त के बहिर्गत सम बहुभुज की, क
ख, एक भुज होगी और ७१ प्र० से उस बहुभुज का क्षेत्रफल
= उसका सीमा सू० $\times \frac{1}{2}$ ग फ परन्तु यह सीमासूत्र, ग च
वृत्त की पालि से छोटा है, तथा, ग फ भी ग च से छोटी है
इसलिये इस बहुभुज का क्षेत्र० फ० ग च वृत्त परि. $\times \frac{1}{2}$ ग च, से
छोटा है जिसे पहले, ग फ वृत्त के क्षेत्रफल के तुल्य माना था,
अर्थात् बहुभुज का क्षेत्र फ० ग फ वृत्त के क्षेत्र० फ० से छोटा है
परन्तु यह प्रत्यक्ष में बड़ा है क्योंकि वृत्त सर्वथा बहुभुज के

अन्तर्गत है इस से ग च वृत्त परि. $\times \frac{1}{2}$ ग ज, का ग च वृत्त से छोटे किसी भी वृत्त के समान होना सर्वथा असंभव है, और, ज च व वृत्त पर इसी रीति की रचना से सिद्ध हो जावेगा कि यह बड़ा भी नहीं है इसी से साध्य सिद्ध हुआ ॥

अनु० — जिस का व्यास एक है उस वृत्त की परिधि = प, रखलो, तो क्योंकि वृत्तों की परिधियाँ उन्हीं की चिज्या वा व्यासों की समानिष्पत्तिक होती हैं इसी से (७४ प्र० की दूसरी आकृ० देखो) ॥

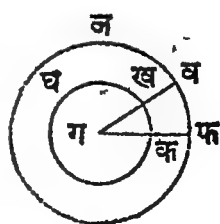
प : क ख ज, परि. : १ : २ क ग, \therefore क ख ज, परिधि = २ प \times क ग, और अब पहले साध्य से, क ख ज छो० फ० = क ख ज पालि $\times \frac{1}{2}$ क ग = २ प \times क ग $\times \frac{1}{2}$ क ग = प \times क ग^२ ॥

यहां प एक नियत राशि है इस से यह आता है कि वृत्तों के क्षेत्रफल उन्हीं की चिज्याओं के वर्गों के समानिष्पत्तिक होते हैं ॥

यहां, किसी भी दिये वृत्त का फल लाने को, प, का अंकात्मक मान निश्चित हुआ चाहिये पर यह वक्ष्यमाण प्रकरण* में कहा जावेगा ॥

७६. सा० प्र० — उक्त दोनों साध्य आगे की रीति से बड़े लाघव से सिद्ध होसकते हैं ॥

यथा, क ख घ, फ ज व, कोई दो वृत्त, एक ही, ग, केन्द्र पर लेकर, क ख घ, पालि के, क ख, अत्यन्त सूक्ष्म कितने ही भाग मानलो और, ग ख, ग क, को, व, और फ तक बढ़ालो तो अब, क ख घ पालि, क ख, से, स, गुणी होवे तो, फ व ज, भी फ व, से, स, गुणी ही होगी ॥



तथा, क ख, अत्यन्त सूक्ष्म है (और इसे धाँहे जैसा सूक्ष्म ले सकते हैं) इस से यह सरलरेखा गिनी जासکتی है, और अब, क ग ख, फ ग व, संज्ञार्तीय विभुज होंगे ॥

इसी से, क ख : फ व :: ग क : ग फ; अथवा, स × क ख : स × फ व :: ग क : ग फ; परन्तु स × क ख = ग क वृत्त पालि, और स × फ व = ग फ वृत्त पालि ॥

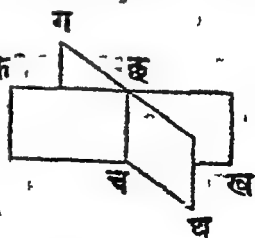
∴ ग क वृत्त पालि : ग फ वृत्त पालि :: ग क : ग फ,
इस से ७४ प्र० का साध्य, सिद्ध हुआ, ॥

तथा क ख ग घेच = क ख × $\frac{1}{2}$ ग क ∴ स × ग क ख घेच = स × क ख × $\frac{1}{2}$ ग क, अर्थात् ग क वृत्त फल = ग क वृत्त पालि × $\frac{1}{2}$ ग क; इस से ७५ प्र० का साध्य सिद्ध हुआ ॥

स्तर, वा धरातल और घन पदार्थों के

विषय के साध्य ॥

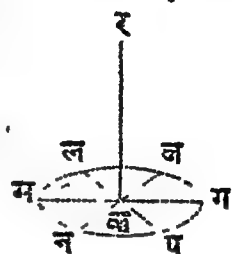
७७. परिभाषा — १ क ख, और ग घ, स्तर, वा रन्दे, च छ, पर एक दूसरे को काटे तो उस रेखा को उभय वा सामान्य खण्ड कहेंगे ॥



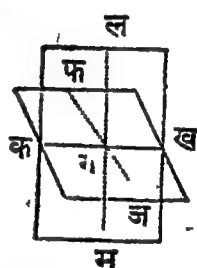
२. सरल रेखा, स्तर पर लंब

कही जाती है जब कि यह उस स्तर की सब रेखाओं पर जो इस से मिलती है लंब रूप होती है ॥

यथा, ल म न, आदि, स्तर पर र क, लंब, तथा, क, लंब
णद से उस में खिंची क ल, क म, आदि
सरल रेखा गानलो अथ र क ल, र क म,
आदि सब सम्कोण होवे तो, र क, लंब
होगी ॥

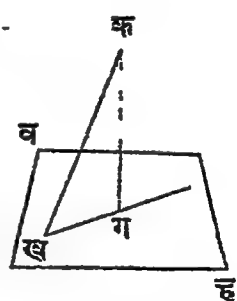


३. दो रन्दो का, क ख, सामान्य खण्ड, और, क ख,
पर इन दोनों स्तरों में, फ ज, ल म, लंब
मानलो, तो दोनों रन्दो के भुजाव का, ल ग
फ, कोण मापक होगा.



यह, ल ग फ, सम्कोण होवे तो, क ल
ख म, स्तर, क फ ख ज, पर लंब कहा
जावेगा.

४. ह व, एक स्तर और उस पर भुजा, क ख रेखा
मानलो तथा रन्दे पर क, से, क ग लंब
डाल कर ख ग, को जोड़-दो तो, ह व,
रन्दे पर, क ख, का भुजाव, क ख ग
कोण होगा.



५. समान्तर स्तर वे होते हैं जो
हर एक ओर दो चाहें जहां तक बढ़ाने
से भी कभी न मिलें.

६. जिसके सिरे, समान्तर, एक से सरल क्षेत्र तथा उन
सिरों के योग कारक, पार्श्व वा प्रिति, समांतर बाहु होते हैं
को द्वेदित घन कहते हैं. इस द्वेदित का नाम आधार की

आकृति के अनुसार होता है यथा जिसका आधार त्रिभुज होगा उसे त्रिकोणिक, वा त्रिकोणाकृति छेदित और जिस के आधार में समकोण होगा उसे समकोण छेदित इत्यादि कहेंगे ॥

७. समान्तर पार्श्व भी एक छेदित ही है जो छह समान्तर बाहु से बनता है जिन्हें में हर एक सामने के दोर समान्तर और एक से होते हैं और समकोण समान्तर पार्श्व के सब पार्श्व समकोण चतुर्भुज होते हैं ॥

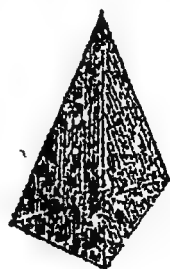


तथा, वर्ग छेदित को जिस में छह पार्श्व समान वर्ग होते हैं, घनक्षेत्र बोलते हैं ॥

८. नल, वा यष्टिघन भी एक छेदित होता है जिस के सिरे वृत्ताकार होते हैं; यह, दो समान और समान्तर, क ख ग, ड च फ, वृत्तों के और पास, एक, ख च, रेखा के घुमाने से बनता है जो रेखा, ज ह, धुर के जो टेनों केन्द्रों को मिलाता है, सदैव समान्तर रहती है, ॥



९. सूचीघन उसे कहते हैं जिसका आधार कोई भी सरलभुज क्षेत्र हो, और सब पार्श्व सरल त्रिभुज हों जिन्हें के सिरे एक ही बिन्दु पर आकर मिलते हों, और वह बिन्दु सूचीघन का सिरा कहा जाता है ॥



अब प्रथम समी० को दूसरे में घटाने से क ख, - प ख^२ + क ग^२ - प ग^२ = २ क फ^२ - २ प फ^२, परंतु क प ख, और क प ग समकोण त्रिभुजों से क ख^२ - प ख^२ = क प^२ और क ग^२ - प ग^२ = क प^२, ∴ २ क प^२ = २ क फ^२ - २ प फ^२ और ∴ क प^२ = क फ^२ - प फ^२

अथवा, क फ^२ = क प^२ + प फ^२ ॥

इसी से, क प फ, समकोण त्रिभुज है और, प फ, पर, क प, लंब है ॥

अनु० १ - स्पष्ट है कि, क दिये बिन्दु से ज ह, रंटे पर केवल एक ही लंब खिंच सक्ता है और यह लंब सब से छोटी रेखा होगी जो कि उस बिन्दु से स्तर तक खिंचेगी ॥

अनु० २ - ज ह रन्टे पर, क प, लंब और उस रन्टे में, ख ग कोई रेखा, मानलो, अब, लंब के, प, पाद से, ख ग, पर, प फ, लंब खिंचा जावे तो, क प, के किसी बिन्दु तक खिंची, क फ, रेखा, ख ग, पर लंब होवेगी ॥

यथा, ख फ = ग फ लेकर, ग प, ख प, ख क, ग क, जोड़ दो तो, ख प फ, फ प ग, त्रिभुज एक से होंगे (१६ प्र०) और इसलिये, प ख = प ग. ॥

अब, ख प क, और, ग प क त्रिभुज भी एक से होंगे ॥

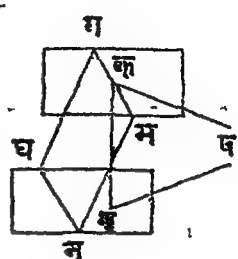
और इस से क ख = क ग, ऐसे ही, क ख फ, और क ग फ, त्रिभुज भी एक से होंगे (प्र० १६) और इसी से, ∠ क फ ख = ∠ क फ ग, ॥

अर्थात् ख ग, पर, क फ लंब है ॥

तथा यह भी स्पष्ट है कि, ख ग, क प फ रंटे पर लंब है ॥

अनु० ३ — क ख, ग घ, द ग, तीनों रेखाओं में से, हर एक पर, क प, लंब होवे तो ये तीनों सरल रेखा एक ही स्तर में होंगी ॥

०६. सा० प्र० — क ख, एक ही रेखा पर दो स्तर क, और ख, लंब होवे तो, वे एक दूसरे के समानान्तर भी होंगे ॥



क्योंकि संभव होवे तो इन रन्दी

को किसी व बिन्दु पर मिलने दो तथा, क प, और ख प, जोड़ दो तो, क्योंकि क ख, रेखा क और ख दोनों रन्दी पर लंब है इस से प क ख, तथा, प ख क, दोनों समकोण है और इसी से, ख प, के क प, समान्तर है जो पूर्व अनुभव से विरुद्ध है इसलिये वे रन्दे, प, पर नहीं मिल सके और इसी से समान्तर हैं ॥

अनु० — क, और ख, दो समान्तर स्तर और दो में से एक पर, क ख लंब होवे, तो वह दूसरे पर भी लंब होवेगा ॥

०७. सा० प्र० — क, और ख, दो समान्तर स्तर, किसी तीसरे, ग म न घ, स्तर से काटे तो ग म, घ न, संपात रेखा समान्तर होंगी ॥

(पिछली आकृति देखो) ॥

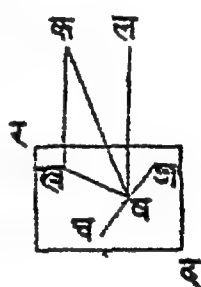
क्योंकि समान्तर स्तर कभी नहीं मिल सके इसी से, ग म घ न, रेखा भी नहीं मिल सकती, जो उन रन्दी में हैं परंतु ग म, घ न, एक ही स्तर में हैं इसी से वे समान्तर हैं ॥

अनु० — क, और ख, दो समान्तर रन्दी बीच में की, ग म, घ न, समान्तर रेखा तुल्य होगी ॥

८१. सा० प्र० — क ख, रेखा, र द, रन्दे पर लंब होवे तो, क ख, के समान्तर हर एक ल व, रेखा उसी स्तर पर लंब होगी ॥

यथा क ख, ल व, समान्तर रेखाओं में, र द, स्तर को, ख व रेखा में काटता हुआ, एक स्तर जाने दो और, र द रन्दे में ख व पर च ज लंब डाललो और, व क, जोड़ लो, ॥

तो ८८ प्र० अनु० २ से, क ख व, स्तर पर च ज, लंब होगा इस से \angle च व ल, समकोण है, परंतु \angle ल व ख, भी समकोण है क्योंकि व ख, पर, क ख, लंब है, और ल व, क ख के समान्तर है अब, ल व, दो, व च, और, व ख रेखाओं पर लंब है इसलिये वह, र द, रन्दे पर भी लंब है ॥

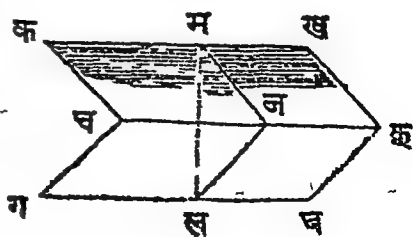


अनु० १ — विलोम से, र द, स्तर पर, क ख, और, ल व, लंब होवें तो वे समान्तर भी होवेंगी ॥

क्योंकि इस साध्य से, ल व रेखा, जो, क ख, के समान्तर है, र द, रन्दे पर लंब है और व बिन्दु से स्तर पर केवल एक ही रेखा खिंच सकती है जो कि उस पर लंब होवे ॥

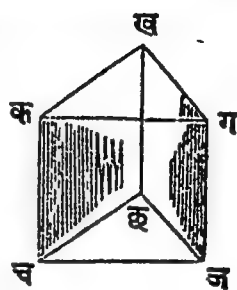
८२. सा० प्र०—च छ, के समान्तर दो क ख, ग घ, रेखा आपस में भी समान्तर होवेंगी ॥

यथा, च छ, पर, ज व ल, स्तर लंब मानलो तो, क्योंकि क घ और ग ल, रेखा, च ज के समान्तर है इस से पूर्व साध्य के अनुसार, वे, ज व ल स्तर पर लंब होंगी और इसी से अनु० १ से वे आपस में समान्तर होंगी ॥



८३. सा० प्र० — क ख ग, च छ ज, दो कोणों की, ख क, छ च के और ख ग, छ ज, भुज के समान्तर होवें तो वे कोण समान होवेंगे ॥

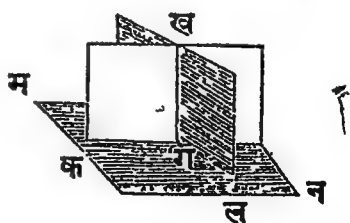
यथा, क ख = छ च और ख ग = छ ज, लेकर इस आकृति के सट्टण जुदे २ बिंदो को जोड़ दो तो क ख छ च, समान्तरवाहु है (३६ प्र०) और इसी से क च = ख छ ऐसे ही ख ग ज छ, भी समान्तरवाहु है इसलिये ग ज = ख छ, अब क्योंकि, क च और, ग ज, दोनों, ख छ के समान्तर और समानान्तर भी है इस से, ८२ प्र० से यह आता है कि ग ज, के क च, समान और समानान्तर भी है इस से, क ग ज च, समान्तर वाहु है, और इसलिये, च ज = क ग. ॥



इसी से, क ख ग, और च छ ज, त्रिभुज समान हैं और \angle क ख ग = \angle च छ ज ॥

८७. सा० प्र० — ख ग, रेखा, म न, रन्दे पर लंब होवे तो, ख ग मे होकर खिंचा, क ख ग, स्तर भी, म न, पर लंब होगा. ॥

यथा, क ख, और, म न, रन्दों का, क ग, संपात है, अब, म न रन्दे मे क ग, पर, ग ल, लंब खिंचलो तो, क्योंकि म न, स्तर पर, ख ग, लंब है इस से, \angle ख ग ल समकोण होगा. ॥



परंतु यह कोण, (३ परि०) म न, पर, क ख रन्दे के भुकाव का मापक है इसी से ये रन्दे एक दूसरे पर लंब रूप हैं ॥

अनु०—क ख, और, ख ल, दो रन्दे किसी तीसरे, म न, रन्दे पर लंब हों तो, उन्हीं का साधारण संपात, ख ग, भी, म न, पर लंब होगा ॥

क्योंकि, ग, विन्दु से म न, स्तर पर एक लंब डाला जावे तो, यह लंब स्पष्ट है कि, क ख, रन्दे में रहेगा ॥

तथा उसी हेतु से यह, ख ल रन्दे में भी रहेगा ॥

इसी से यह उन दोनों की संपात रेखा हांगी ॥

८५. सा० प्र०—कोई क ख ग ल छेदित उस के आधार के समान्तर किसी स्तर से काटा जावे तो वह खण्ड आधार के तुल्य होगा, (६० प्र० की १ और २ आकृ० देखो) ॥

ज ह ट, समान्तर खण्ड मानलो, अब क ख ग और ज ह ट, दो समान्तर रन्दे क ख, ज ट स्तर से कटे हैं इस से ट ज (८० प्र०), क ख, के समान्तर होवेगी ॥

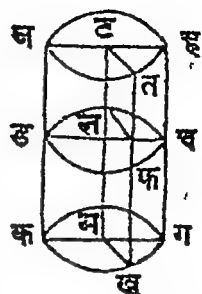
इसी रीति से ज ह भी ख ग के समान्तर होगी ॥

और ऐसे ही सब भुजा जानना, परंतु छेदित के लक्षण से क ट और ख ज, समान्तर है इसी से, क ख ज ट एक समान्तर बाहु है, ३५ प्र० से, ट ज = क ख; इसी रीति से, ज ह = ख ग. ॥

और ऐसे ही और भी भुजा जानना अर्थात् ज ट ह, और क ख ग, परस्पर तुल्य भुजा है तथा ८३ प्र० से \angle ज = \angle ख, \angle ह = \angle ग, और ऐसे ही और कोण भी. जानना ॥

इस से यह आता है कि, ज ट ह खण्ड क ख ग के तुल्य है ॥

८६. सा० प्र०—क ख ग ज, न ल उसकी आधार के समा-
न्तर किसी रंदे से काटा जाये तो, ड फ च,
आधार के समान एकवृत्त होवेगा. ॥

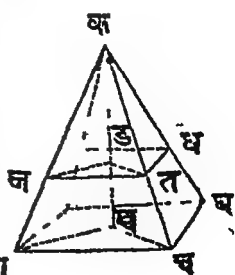


यथा, क ग ह ज, और, ख त ट म,
दो रन्दे, ट म, धुर में होकर कड़े और ड
फ च, खण्ड को, फ, च, और, ल चिन्हे
में काटते हुए मानलो, तो न ल के लक्षण
से, ख फ, और, म ल, समान्तर होवेंगी, और ८० प्र० से, ल
फ, म ख, के समान्तर होगी; इसी से, ख फ ल म, समान्तर
षाहु होगा, और अब, ल फ = म ख, तथा इसीरीति से
यह भी सिद्ध होसक्ता है कि, ल च = म ग, इत्यादि. ॥

परंतु म ख, क ख ग, वृत्त की चिज्या है इस से, ड फ च,
क ख ग, के तुल्य वृत्त है. ॥

८७. सा० प्र०—ग च घ क, हर एक सूची में, आधार के
समान्तर ज त घ खण्ड आधार के सजातीय होगा और इन
दोनों खण्डों में सिरे से उन्हीं की दूरियों के वर्ग की निष्पत्ति
होवेगी ॥

यथा, ग च घ, आधार के समान्तर, ज त घ, खण्ड मानलो
और क ड ख, लंब इन दोनों रंदों पर
डालकर, च ख, और, त ड, जोड़ दो तो
८० प्र० से, त ज, और, त घ, ग च, और
च घ, के समान्तर होवेगी. और इसलिये
८३ प्र० से \angle ज त घ = \angle ग च घ,
इस रीति से \angle घ = \angle घ तथा और ग



भी, अर्थात् ज त घ, खण्ड ग च घ, के समकोण है. ॥

अज, क ग उ, और, ज ज त सजातीय विभुजों से, क च
ज त : ग उ : ज त ॥

ऐसे ही, क च य, और ज त य सजातीय विभुजों से, क
च : क त : : ज य : ग च : ज त : : य घ त
ध. और इसी नीति से यह सिद्ध होसता है कि, ज त घ,
खरड की सब भुजा ग च घ, की सब भुजा की यथाक्रम
समनिष्पन्निक है, ॥

इसी से (११७ प्र०) यह आता है कि, ग च घ, जे० फ०
: ज त घ, जे० फ० : : क वर : क तर एरंतु ग च ज त
: : क च : क त. ॥

तथा, क ख च, क ड त, सजातीय विभुजा से क च :
फ त : : क ख ज ड .: ग च : ज त : : क ख : क
ड और वर्ग करने में ग च ज त. : क ख : क ड, .: ज
च घ, जे० फ० : ज त घ, जे० फ० : . क खर : क डर ॥

८८. ला० प्र०—क ख ग घ, हर एक शंखु में आधार के
समान्तर हरे एक खरड, दृप्त होता है तथा यह खरड,
और आधार, एक दूसरे प्रति होते हैं जैसे कि सिरे से उन्हें
की दूरियों में दूरी होते हैं ॥

यथा, इन दोनों समान्तर रन्धो पर, घ व य, तं व, करलो
और ख ड घ, और, ख ड घ, दो रन्धे घ द ड, धुर में
होकर च छ ज, खरड को, द छ, और, द ज, रेखाओं में
काटते हुए मानलो, तो ८० प्र० से द छ, ह ख के समान्तर

और द ज, ह ग के समाप्तर होगी. और इस हेतु से, घ ह ख, और, घ द छ, त्रिभुज सजातीय है ॥

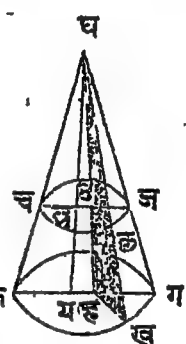
तथा घ ह ग, और घ द ज, भी सजातीय हैं इसी से घ ह : घ द :: ह ख : द छ ॥

तथा, घ ह : घ द :: ग ह : ज द, ∴ ह ख : द छ :: ग ह : ज द. परंतु, क ख वृत्त की चिन्ता ह ख = ग ह, इसलिये, छ द = ज द तथा, च छ ज, पालि की और भी हर एक बिन्दु की ऐसी ही सिद्धि होगी इस से वह वृत्तज्ञेय है ॥

तथा, घ ह य, और, घ द व, सजातीय क त्रिभुजों से, घ य : घ व :: घ ह : घ

द वा :: ग ह : ज द ∴ घ य^२ : घ व^२ :: ग ह^२ : ज द^२ परंतु ७४ प्र० से क ख ग, वृत्तफल : च ज ज, वृत्तफल : ग ह^२ : ज द^२ ∴ क ख ग वृत्तफल : च छ ज वृत्तफल : घ य^२ : घ व^२ ॥

८६. सा० प्र०—गोल का रन्दे से हुआ हर एक खण्ड वृत्तज्ञेय होता है यथा, क घ ग ख, गोल का, जिस का, च, केन्द्र है, क ज ग, खण्ड मानलो, और, च, से, क ज ग, रन्दे पर, च छ, लंब डाल लो, तो ख च छ घ, गोल का धुर होवेगा. अब, च क घ ग, और, च



अ घ, धुर में हो कर, कड़े दो स्तर मानलो तो, क छ च,

और, ज छ च, समकोण निभुजों में च क = च ज, क्योंकि ये गोल की चिज्या है और, च छ उभयनिष्ठ है, इसलिये, छ क = छ ज, ऐसी ही रीति से यह भी सिद्ध होगा कि, छ, से क ज ग, खण्ड की पालि तक, और कोर्ट भी खिंची रेखा छ क, के तुल्य होगी

इसलिये, क ज ग, एक तृप्त है जिसकी, छ क चिज्या है ॥

अनु०— केन्द्र में हो कर कटे गोल के खण्ड की, च क, चिज्या होगी जो, क छ, से प्रत्यक्ष में बड़ी है, इसी से, क ज ग, गोल का छोटा वृत्त, और गोल के केन्द्र में होकर कटा खण्ड उस का बड़ा वृत्त कहाँता है ॥

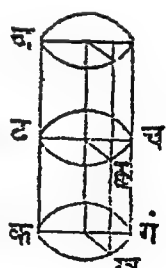
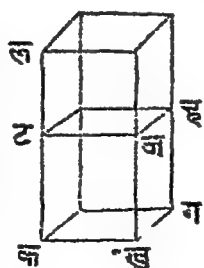
तथा गोल के सब बड़े वृत्त प्रत्यक्ष में एक दूसरे के तुल्य होते हैं ॥

६०. सा० प्र०—तुल्य आधार औष्य के, छेदित, तथा, नल, एक दूसरे के समान होते हैं ॥

यथा, इस आकृति में न ल और छेदितों को एक ही

धरातल पर खड़े मा-

नलों, और उन्हीं के ल आधारों के समान्तर एक स्तर से इन्हें कटने दो जिस से, ट ज ह और, ट छ



च, खण्ड हो जावे, तो, ये सब खण्ड एक दूसरे के तुल्य होंगे, क्योंकि ८५ प्र० से क्रम से ये अपने २ आधारों के तुल्य हैं पर, आधार सब तुल्य दिये हुए हैं ॥

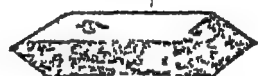
इसी रीति से यह भी सिद्ध हो जायगा कि और भी समान्तर खण्ड समान होंगे ॥

अब ये छेदित और, न ल, अत्यन्त सूक्ष्म पतले और समान इन स्तरों से बने गाने वा अनुभव किये जा सकते हैं ॥

और औच के तुल्य होने से हर एक इन स्थूल पदार्थों में स्तरों की तुल्य हो सख्या होगी, इसी से यह आता है कि ये छेदित और न ल समान होंगे ॥

व्याख्या वा दृष्टान्त और प्रयोग ॥

१. ताड़ों की एक गुरु श्रेण पर छेदित की आकृति में रखी है उस में पार्श्वों का चानो जो भुजाव हो पर छेदित का घन फल सदा एक ही होगा ॥



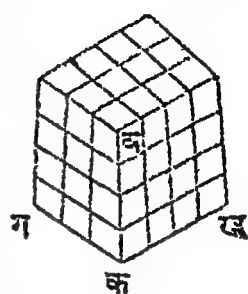
यहां एक ही आधार-औच के पतले पत्तों (ताड़ों) से छेदित बना है ॥



इस साध्य के माथन की रीति, कैवेल्लेरिअस नाम साहिब ने निकाली थी, और "अनन्तो का गणित " इस नाम से प्रसिद्ध है, पर हर्षाकृत में यूक्लिड की कहीं हुई गिती करण नाम रीति के समान यह ठीक नहीं है किन्तु वह गिती कर्ण की रीति अति विस्तार के हेतु ऐसे लघु गणों की पहुच से बाहर है और बिशेष कर के इस से कि वह पूर्ण गणित की रीति है जो लाघव और शुद्धता के बिषय में और सबों से अति उत्तम और प्रशंसनीय है ॥

२०. समान कोण स्थूल पदार्थ के घनफल लाने का प्रकार ॥

यथा क ख लंबाई में चार, क ग, चौड़ाई में तीन, और, क घ, उंचाई में भी चार, एकाई मानता तो, क व, संपूर्ण उंचाई में ४ गूँठे होंगे जिन्हें में हर एक, एक एकाई के टल का होगा, परन्तु हर एक रूढ़े में से प्रत्यक्ष है कि १२ एकाई



वा घन कट सक्ते हैं, इसलिये संपूर्ण समकोण स्थूल पदार्थ में ४ गुणित १२ वा ४८ घर एकाई होंगी. इस से यह जाना जाता है कि समकोण स्थूल पदार्थों में घन एकाई वा घनफल, लंबाई चौड़ाई और दल, वा, वेध को आपस में गुण देने से, वा एक ही बात है कि आधार, के क्षेत्रफल को लंब रूप उंचाई से गुण देने में आजाता है ॥

यथा क ख ग, आधार का फल = ३ × ४, और, क ख व ग, घनफल = ३ × ४ × ४, ॥

तथा ये रेखात्मक मान इंचरूप होंगे तो, घन इंचों में और फुट होंगे तो घन फुटों में घनफल आवेगा इत्यादि जानना ॥

१. उदा० — ६ फुट लंबी ३ चौड़ी और २ फुट मोटी पत्थर की सिल्ली का क्या घनफल होगा? .. — ३० इंच घ. फुट ॥

२. उदा० — २ फुट लंबी १ इंच चौड़ी ६ इंच मोटी, सिल्ली में कितने घन इंच हो सकेंगे ? ३० १००८,

३. छेदित और नलो के घनफल लाने की रीति क्योंकि समान आधार औच्य के मध्य छेदित और नल, तुल्य होते हैं इस से जाना जाता है कि क ख ग ल, त्रिपम छेदित तथा, क ग ज, नल, का घनफल, क ख ग ल, समान कोण छेदित के घनफल के समान होगा, और इसी से उन्हो में से हर एक का घनफल, आधार क्षेत्र और लंब रूप औच्य के घात के तुल्य होगा ॥

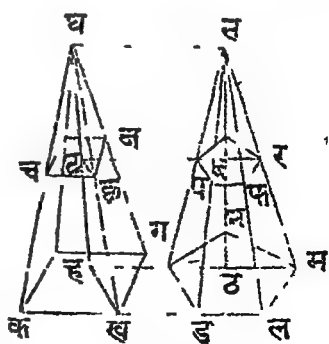
१. उदा० — एक छेदित के आधार का क्षेत्रफल २४ वर्ग फुट, और उंचाई ३ फुट है, उसका घनफल क्या होगा? ॥

यहां आधार क्षेत्रफल = २४. \therefore घन. फ० = २४ \times ३ = ७२ घ० फु० ॥

२. उदा० — एक छेदित का आधार समकोण त्रिभुज है जिस की, भुजकोटि क्रम से ६ और ४ इंच है तथा औच्य ५ फुट है घ०फ० कहो . . . \therefore उ० ७२० घ० इ० ॥

६१ गा० प्र० — तुल्य आधार औच्य के सूची और शंकु एक दूसरे के समान होते हैं ॥

सूची आदि को एक ही स्तर पर स्थित और एक ही रन्दे से कटे मानलो जो आधार के समान्तर हों और जिस से, च छ ज, और, प फ र, खण्ड होजावे; अब, च छ ज, क ख ग, दोनों रन्दी पर, घ ट ह, लं, तथा, प फ र, ड ल म, दोनों रन्दी पर, स व ठ, लं डाल लो तो, घ ह = स ठ, घ ट, ल व



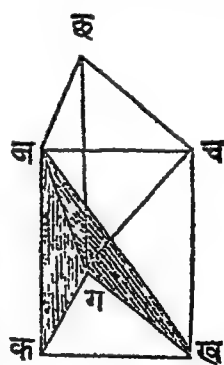
= से व, परन्तु ८० और ८८ प्र० से, क ख ग ज्ञे० फ० : च छ ज, ज्ञे० फ० : घ ह : घ ट, तथा ड ल म, ज्ञे० फ० : प फ र, ज्ञे० फ० : स ठ : स व : क ख ग ज्ञे० फ० : च छ ज, फ० : ड ल म ज्ञे० फ० : प फ र, ज्ञे० फ०.

परन्तु पञ्चधर्म से क ख ग ज्ञेव = ड ल म ज्ञेव, ∴ च छ ज ज्ञेव = प फ र ज्ञेव इसी रीति से यह भो. सिद्ध हो. सक्ता है कि और भी हर एक समान्तर खण्ड समान होगा इसी से सूची, जो इन समान और समान्तर खण्डों को वनी है एक दूसरी के समान होंगी ६० (प्र० देखो) ॥

६२. सा० प्र०—हर एक त्रिकोण सूची तुल्य आधार औच्य के छेदित का तृतीयांश होती है ॥

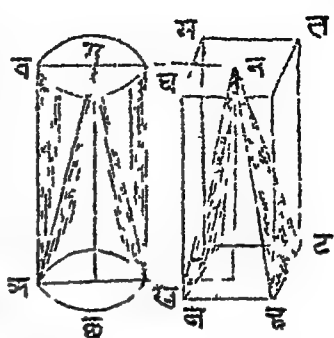
यथा क ख ग, और, च छ ज, छेदित के दोनों सिरे हैं अब, ख ग ज, और ज, ग च, में होकर रन्दे डाल दो तो, इस से छेदित के तीन तुल्य खण्ड हो जावेंगे. ॥

इसी से ६१ प्र० से, क ख ज, और, ख च ज, तुल्य आधारों पर स्थित और एक ही, औच्य की, क ख ज ग, और, ख च ज ग, सूची समान होंगी और इसी रीति से, क ख ग और



ज छ च तुल्य आधारों पर स्थित, और एक ही औच्य की, क ख ज ग, और ज छ च ग, सूची भी समान होंगी इसी से क ख ग ज, सूची क ख ग छ, छेदित का तृतीयांश है. ॥

१ अनु० — हर एक, ज ह ट न' सूची तुल्य आधार औष्य के, ज ह ट म, छेदित की तिहाई होती है, क्योंकि आधार, चतुर्भुज होवे तो उसके बीच से दो चिपुज होसके है और इसी से उस छेदित के भी दो चिकोण रूप छेदित, तथा उस सूची की दो सूची होसकी है जो



हर एक अपने २ छेदित की तिहाई होगी इसलिये दोनो खण्ड सूची मिलकर अर्थात् समग्र सूची, दोनो खण्ड छेदितो के मिल कर अर्थात् समग्र छेदित की तिहाई होगी ॥

२ अनु० — हर एक, क ख ग, शंशु क ख घ च, न ल, वा ज ह ट म, छेदित का तृतीयांश होगा जो कि उल्हो के आधार औष्य समान होवेगे ॥

क्योंकि, क ख घ च, न ल, ज ह ट म, छेदित के तुल्य सिद्ध हो चुका है, तथा, क ख ग, शंशु भी, ज ह ट न, सूची के तुल्य सिद्ध हो आया है, परंतु यह सूची, ज ह ट म, छेदित की तिहाई है इसी से क ख ग, शंशु भी, ज ह ट म, छेदित के तृतीयांश के समान होवेगा ॥

प्रयोग और उदाहरण ॥

शंकु वा सूची के घनफल लाने का प्रकार ॥

आधार के क्षेत्रफल को लंबरूप उंचाई से गुण दो और इस घात की तिहाई घनफल होवेगा ॥

१. उदा० — एक सूची का आधार वर्गक्षेत्र है जिस की भुज ३ फुट और उसकी घात्मक उंचाई ८ फुट है. घनफल चाहिये. ॥

यहां आधार = $3^2 = 9$; \therefore घन फ० = $\frac{9 \times 8}{3} = 24$
घ० फु० ॥

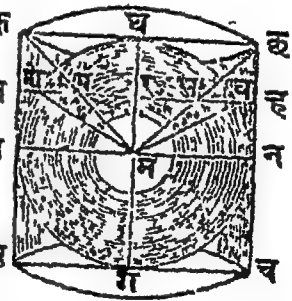
२. उदा० — एक शंकु का आधार ६ वर्गफुट और औच्य ७ फुट है, घ० फ० कहो... .. उ० १४ घ० फुट. ॥

३. उदा० — एक वर्ग सूची का लंब १२ और आधार भुज १ $\frac{3}{4}$ फुट है घ० फ० क्या होगा ? उत्त० १२. २५ घ० फु०

६३. सा० प्र० — हर एक गोल उपरिगत नल की द्वा तिहाई होता है. ॥

यथा, ग न घ ल, गोल की घ ग, धुरी, उसके उपरिगत, ख च छ क, न ल, और, म, केन्द्र तक, क छ म, शंकु है ॥

अब, तीनों घनों का, ख च, आधार के समान्तर और न ल, गोल और शंकु को क्रम से, ज, श, और प, बिन्दुओं में काटता हुआ, क
ज ह कोई खण्ड मानकर इन बिन्दुओं ज
को, म, केन्द्र से जोड़ दो, और, ख च, ल
के समान्तर, न ल, खैचलो. तो क घ
म और प र म, सजातीय त्रिभुजों से ख
क घ : घ म :: पर : र म; परन्तु घ म
= क घ \therefore र म = प र, ॥



तथा, श र म, समकोण त्रिभुज से. $श म^2 = श र^2 + र म^2$;
परन्तु श म = ज र, और, र म = प र, \therefore ज र $=$ श र +
प र 2 अब, ५७ प्र० अनु० से जिस वृत्त की विज्या च है वह,

च^२ य, से सूचित हो सता है; इसलिये पिछले समी० के दोनों
 एहों को, य, से गुणने से, य. ज र^२ = ए. श र^२ + ए पर^२;
 अर्थात् ज ह वृत्त का फल = य व वृत्त फल + ए स वृत्त
 फल, अर्थात् नल का खखड अपने सट्टय, गोल और शंकु के
 खखडों के योग के समान है ॥

और हर एक समान्तर खखड जो कि वन सकोगा ऐसे ही
 सिद्ध होगा इस से जाना है कि ल छ, अर्द्ध नल का घनफल,
 ल घ न अर्द्ध गोल और क छ न, शंकु के घनफलों के तुल्य
 है; परंतु क छ स शंकु ल छ अर्द्ध नल की तिहाई के तुल्य
 है; ∴ ल छ, अर्द्ध नल = ल घ न, अर्द्ध गोल + $\frac{1}{3}$ ल
 छ, अर्द्ध नल ∴ $\frac{2}{3}$ अर्द्ध नल, ल छ = अर्द्ध गोल ल घ
 न; और ठूने करने से, $\frac{2}{3}$ ख व छ न, नल = ल घ न ग,
 गोल ॥

रेखा गणितीय अभ्यासप्रश्न ॥

८४. रेखागणित की प्रथम प्रक्रिया-चिंतने की स्व से
 अच्छी रीति यह है कि जानी बूझी वा टहराई हुई
 बातों से क्रम-बद्धते जर्वेजव तक पूर्व अज्ञान वा साध्य दृष्ट
 की सिद्धि हो जावे यही बहुधा केवल रीति अब तक इस
 ग्रन्थ में ली गई है और इन्हीं को संघटना कहने है ॥

यह रीति यद्यपि पूर्ण सिद्ध वा निरूपित बातों को
 पठाने समझाने के लिये बड़ी अद्भुत है तो भी इस में दृष्ट,
 साधन के लिये पूर्व सिद्ध ज्ञान वा उपाय की अपेक्षा होती
 है इसी से यह कुछ बड़े दान की नहीं है ॥

तथा रेखा गणितीय प्रक्रिया के निरूपण करने की उपपत्ति
 वा साधननाम एक और भी रीति है ॥

इस में साध्य इष्ट को पूर्व ही मानकर उसी के अनुसार अनेक फल निरूपित किये जाते हैं जो क्रम से ठीक २ उसी अनुभव से आजाते हैं और अन्त में उस से कोई ऐसी बात सिद्ध होजाती है जो पहले ही से निश्चय हो रही है, इस के हो जाने से अनुमान होता है कि पूर्व का वह अनुभव भी सत्य है और अब उपपत्ति वा साधन प्रक्रिया भी पूरी होगई ॥

तथा इस साधन प्रक्रिया में क्रम से अंत से आदि तक विलोम कर आवें जिस से कि पूर्व माने इष्ट तक आजावें तो वह संघटना प्रकार कहावेगा ॥

इस से जाना जायगा कि यहां उपपत्ति वा साधन की संघटना ठीक २ विलोमरूप है ॥

रेखा गणितीय साधन, निर्माण करने का एक प्रकार है इसी से प्रश्नों के करने की राह निकालने के लिये विशेष करके लिया जाता है परंतु इस साधन की रीति से क्रिया करने में साधारण सूच नहीं बनसक्ते, और प्रश्न के स्वभाव ही से अनेक प्रकार की विशेष युक्तियां सूचित हो जाती है उन्हीं ही के हेतु इष्ट सिद्ध होजाती है ॥

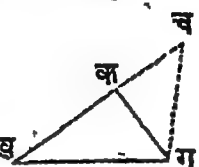
कहीं रेखा, और रेखाओं के समान्तर वा उन्हीं पर दिये कोण से भुकी हुई बनाने को होती है; कहीं दिये कोण वा रेखा आयी २ करने को होती है कहीं कोई दिये बिन्दों में होकर वृत्त खींचने को होते हैं इत्यादि इस साधन के विषय हैं ॥

इन्हीं में से कोई २ युक्तियां दिखाने के लिये आगे प्रश्न लिखे जाते हैं परंतु विद्यार्थी को ४५ वें साध्य तक पढ़कर व. १ और ७२ वें साध्य तक पढ़कर व. २ के प्रश्नों का प्रारंभ किया चाहिये ॥

व० — १ साध्यवस्तूपपाद्य ॥

१. आधार, आधार पर का एक कोण तथा शेष भुजाओं का योग दिया है चिभुज बनाओ ॥

उपपत्ति वा साधन — क ख ग, आकांक्षित चिभुज मानलो जिस में ख ग = दिया आधार, \angle ख = आधार पर का दिया कोण और, ख च = क ख, क ग भुजाओं का योग और, ख ग च, जोड़ दो तो, क ग = क च, और क ग च समद्विबाहु चिभुज होगा, ॥



इसी से \angle क ग च = \angle क च ग, इस से यह बनाने की रीति सिद्ध हुई ॥

यथा, ख ग = दिया आधार लेकर \angle ख = आधार पर का दिया कोण बनाती हुई, ख च, खचलो; और, ख च = दो भुजाओं का योग लेकर, ग च जोड़ दो, तथा ग, से, ख च, को, क में मिलती और \angle क ग च = \angle क च ग, बनाती हुई ग क, रेखा खँचलो, तो अब, क ख ग, आकांक्षित चिभुज बनजावेगा, ॥

२. आधार, आधार पर का एक कोण, और लंब दिया है चिभुज बनाओ ॥

३. एक समद्विबाहु चिभुज बनाना चाहिये जिसका लंब, आधार, के समान है ॥

४. एक समद्विबाहु चिभुज बनाना चाहिये जिसका आधार और सिरे का कोण दिया है ॥

५ - एक बिन्दु निश्चित किया चाहिये जो एक सीधी रेखा से दी लंबरूप दूरी पर होवे और उसी रेखा में एक दिये बिन्दु से भी दी दूरी पर होवे ॥

६. दी रेखा में एक बिन्दु निश्चिन्त किया चाहिये जो दो दिये बिन्दुओं से सम दूरी पर होवे ॥

७. एक समकोण त्रिभुज बनाओ जिसका कर्ण, भुज से दूना हो और सिद्ध करो कि भुज के सन्मुख का कोण 30° का होगा ॥

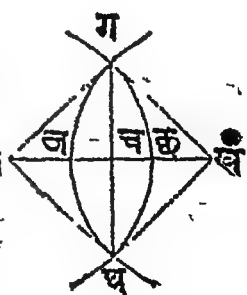
८ एक वर्गजेव बनाना चाहिये जब कि उसका कार्य दिया है ॥

६. एक आयत बनाना चाहिये जब कि उसका कार्य और एक भुजा दी है ॥

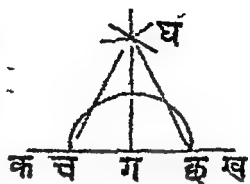
१०. सिरे से आधार तक गिंची रेखा से एक त्रिभुज के सम दो भाग किये चाहिये ॥

११. क ख, दी सरलरेखा के सम दो भाग किये चाहियें ॥

संघटना क, को केन्द्र मानकर, आधी, क ख से बड़ी, किसी चिज्या से, घ छ ग चाप, तथा, ख, को केन्द्र मानकर कंपास के उसी बिस्तार से, घ ज ग, चाप, पहिली को ग, और घ, बिन्दो में काटती हुई बनालो क और ग घ को जोड़दो, जो, च चिन्ह पर से, क ख को आधा २ करदेवेगी, अब इसे प्रमाण देकर सिद्ध किया चाहिये ॥



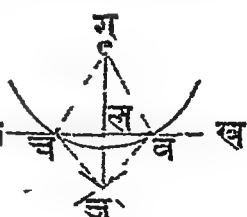
१२. क ख, रेखा में एक दिये, ग, बिन्दु से, ग घ, लंब डाला चाहिये ग, केन्द्र और कोई सी भी ग च, चिज्या से, च छ, अर्द्ध वृत्त, तथा, च, और, छ, केन्द्रों से, और, ग च, व ग छ, से, अधिक, कंपास के कोई भी बिस्तार से घ, पर एक दूसरी को काटती हुई चापें खेंचलो और, ग घ, जोड़ दो तो यही, क ख, पर लंब होगा, अब इसे सप्रमाण सिद्ध किया चाहिये ॥



१३. ख क ग, दिये कोण के सम दो भाग किये चाहिये क, केन्द्र से, कंपास के कोई से भी बिस्तार से, च ल, चाप बनालो, च, और ल, केन्द्रों से और कंपास के उसी बिस्तार से, व, पर एक दूसरी को काटती हुई चापों को खेंचकर, क व, को जोड़ दो तो इस से \angle ख क ग, के दो सम भाग हो जावेंगे, इसे प्रमाण की रीति से सिद्ध किया चाहिये ॥

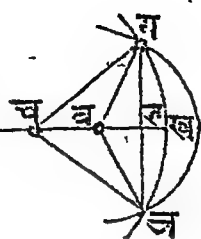


१४. ग, दिये बिन्दु से, क ख, रेखा पर, ग ल लंब डाली चाहिये. ग, केन्द्र से, क ख, को च, और, व, बिन्दुओं में काटती हुई एक चाप खेंचो. तथा, च, और व, को केन्द्र मानकर, च व, के आधे से बड़ा कोई चिज्या से, एक दूसरी को ज, क च, काटती हुई दो चापें खेंचकर, ग ज को जोड़ दो तो यही, क ख, पर लंब होवेगा ॥



रेखा के सिरे के निकट लंब पड़े तो, क ख, में किसी च बिन्दु को केन्द्र मानकर, च ग चिज्या से, ग ज, चाप,

तथा, उसी रेखा में किसी और, व बिन्दु को केन्द्र मानकर, व ग, चिज्या से, पहली को, ग, और, ज, बिन्दु में काटती क हुई दूसरी चाप खेंचकर, क ख, को, ल बिन्दु में काटती हुई ग ज रेखा कर



दो, तो, क ख, पर, ग ल लंब होगा, इसे सिद्ध करो ॥

१५. दिये बिन्दु से दी रेखा के साथ 85° का कोण बनावे ऐसी एक रेखा खेंचो ॥

१६. चिभुज के आधार में एक ऐसा बिन्दु निश्चित करो कि एक भुज के समान्तर उस से दूसरी भुज तक खिंची रेखा एक ती रेखा के समान होवे ॥

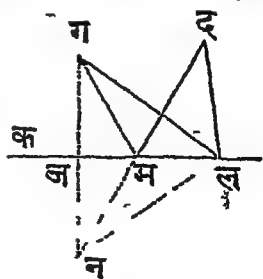
१७. दिये बिन्दु से एक रेखा खेंचो कि जिसका, दो दी समान्तर रेखाओं के बीच का भाग एक ती रेखा के तुल्य होवे ॥

१८. एक समकोण के तीन समान भाग दिये चाहियें ॥

१९. एक बिन्दु में होकर खिंची रेखा से, एक समान्तर बाहु के दो तुल्य भाग करो ॥

२०. एक दिये समद्विबाहु समकोण चिभुज के अन्तर्गत एक वर्गचेत्र बनाओ और सिद्ध करो कि यह वर्ग उस चिभुज का आधा होवेगा ॥

२१. क ल, रेखा में, म, एक ऐसा बिन्दु निश्चित किया चाहिये कि, ग, और, द, दो दिये बिन्दु से खिंची, ग म, द म, रेखा, $\angle ग म क = \angle द म ल$, बनावे, ॥

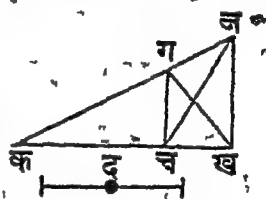


साधन. बिन्दु निश्चित हुआ मानलो, और, क म, पर ग ज, लंब डाल कर, ड म, को बढा दो कि वह वर्द्धित, ग ज,

से, न, पर जामिले, तो ८. प्र० से $\angle न म ज = \angle द म ल$,
 पर, $\angle ग म ज = \angle द म ल$, $\therefore \angle न म ज = \angle ग म ज$, अब न म ज, और, ग म ज, त्रिभुजों में, म ज उभ-
 यनिष्ठ है, $\angle ग म ज = \angle न म ज$ और समकोण $\angle ग ज म = \angle न ज म$, इसलिये १७ प्र० से ये त्रिभुज समान
 हैं और, न ज = ग ज, इस से यह निर्माण रीति सिद्ध हुई ॥

यथा क ल, पर, ग ज न, लंब डालकर, ग ज = ज न,
 लेलो, और, क ल को, म, में काटती हुई न द, रेखा जोड़
 दो तो आकांक्षित, बिन्दु, म, होवेगा ॥

२२. क ख ग, त्रिभुज दिया है इस के समान, क च ज
 त्रिभुज बनाओ जिसका आधार क च, द,
 दी रेखा के समान होवे. बनाने का,
 प्रकार, क च = द, लेकर, ग च, जोड़
 दो और ख, से ग च के समान्तर, क ग,
 वर्द्धित को, ज, पर काटती हुई, ख ज, रेखा खेंचकर, च ज,
 जोड़दो तो, क च ज, त्रिभुज, क ख ग, के समान होगा, अब
 इसे प्रमाण से सिद्ध करो ॥



२३. आधार, आधार पर का एक कोण, और लंब दिया
 है समान्तरबाहु बनाना चाहिये ॥

२४. दिये समद्विबाहु त्रिभुज से एक चतुर्भुज काटो
 जिसका आधार त्रिभुज के आधार के समान होवे, और शेष
 तीन भुज एक दूसरी के सब समान होवे ॥

प्रमेयोपपाद्य ॥

२५. समान्तरबाहु के कर्ण एक दूसरे के सम दो भाग
 करते हैं ॥

२८. बर्गकोण के कर्ण उसे चार एक से चिभुजों में बाँटते हैं ॥

२९. हर एक चतुर्भुज के चारो कोणों का योग चार समकोण के समान होता है ॥

३०. समद्विबाहु चिभुज के आधार के सिरों से भुजों पर पड़े दोनो लंब समान होंगे ॥

३१. दिये कोण के सम दो भाग कारक कोई रेखा खेंची जावे तो उस रेखा का हर एक बिन्दु कोण को बनाती हुई दोनो रेखाओं से समान ही दूर रहेगा ॥

३२. समान्तरबाहु के कर्ण का समद्विभाजक हर एक रेखा समान्तरबाहु को भी आधा २ करती है ॥

३३. दो रेखा के किसी नंबर से सम दो भाग होवे तो उस लंब का हर एक बिन्दु रेखा के दोनो सिरों से तुल्य दूर होगा ॥

३४. दो समान्तर रेखाओं से तुल्य दूरी पर एक बिन्दु लेकर उस में होकर समान्तर रेखाओं तक कोई दो रेखा खेंची जावे तो इस रीति से बने दोनो चिभुज एक से होवेंगे ॥

३५. एक दूसरी के समान्तर दो रेखाओं में से एक पर लंब डाला जावे तो वह दूसरी पर भी लंब होगा ॥

३६. समान्तरबाहु के सम्मुख कोणों से कर्ण पर पड़े लंब समान होते हैं ॥

३७. समद्विबाहु चिभुज की सिरों की ओर बड़ी एक भुज से बने बहिर्गत कोण की सम दो भाग कारक रेखा आधार के समान्तर होता है ॥

३६. लव रूप से एक दूसरी को सम दो भाग कास्का रेखाओं के सिरों के योग की रेखा समबाहु चतुर्भुज बनावेगी ॥

३७. समबाहु चतुर्भुज का फल, कर्णों के घात का आधा होता है ॥


३८. समान्तरसूच, वा, सलाका, क ख, और, ग घ, दो सलाका, च छ, और ज झ, दो घीतल क च ~~क च~~ ख के तुल्य टुकड़ों से जुड़ी हैं जिन्हों में ~~क च~~ च, छ, ज, और, झ, पर कीलें लगी हैं ॥ ~~क च~~ क घ

ऐसी कि, च छ = झ ज, सिद्ध करो कि, क ख, सदैव, ग घ, के समान्तर रहेगी उन्हों में चाहे सो दूरी होवे ॥

३९. सिद्ध करो कि २५ प्रश्न में, ग स, और, द म, रेखाओं का योग, ग, और, द, बिन्दों से क ल, तक जो रेखा खिंच सकेंगी उन सबों से छोटा होवेगा ॥

व० २— धस्तपपाद्य ॥

४०. चार दी रेखाओं के वर्ग योग के तुल्य एक वर्ग क्षेत्र बनाया चाहिये ॥

निर्माणा की रीति = क ख, और ख ग, को भुज कोटि मानकर, क ख ग, समकोण त्रिभुज बनाओ, क ग (पूर्वनिश्चितकर्ण) और ग घ, को भुजकोटि मानकर दूसरा समकोण त्रिभुज इत्यादि बनाते ग  क

और घ च, के वर्गयोग के समान होगा. इसे सिद्ध करो ॥

४१. एक समचिवाहु त्रिभुज में दूसरा समचिवाहु त्रिभुज बनाओ और सिद्ध करो कि अन्तर्गत त्रिभुज पहले त्रिभुज का चतुर्थांश है ॥

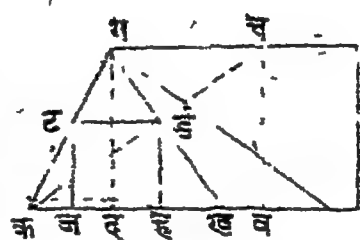
४२. दिये कोण में एक दूसरी पर भुंकी दो रेखाओं के बीच में एक दिये बिंदु में हो कर एक रेखा ऐसी खींची जिसके उस बिंदु से दो सम भाग हो जावें ॥

४३. दिये त्रिभुज में एक बिन्दु निश्चित करो - जिसकी लंघरूप दूरी दोनों भुजों से दो है ॥

४४. दी बिज्या से एक वृत्त बनाओ जो दो दिये बिंदुओं में होकर जावे ॥

४५. क ख ग, दिये त्रिभुज में एक, जो टं डं हं वर्ग बनाओ ॥

साधन - अर्थ मिले हुआ सानलो, अब, गं ट, और, ग च, क खं, पर लव और उस के समान्तर खिंचकर, क ड, को



जोड़कर बड़ा दो कि वह, गं च, से, च, पर, जो मिले तो, क ट ड, और, क ग ह, त्रिभुज सजातीय हैं इस से $\frac{क ग}{क ट} = \frac{ग च}{ट ह}$ ॥

परंतु क ट ज, और क ग ह, त्रिभुज भी सजातीय हैं और $\frac{क ग}{क ट} = \frac{ग ह}{ट ज}$ $\therefore \frac{ग च}{ट ह} = \frac{ग ह}{ट ज}$ परंतु टं डं हं वर्ग का भुजा है ॥

$\therefore ग च = ग ह$ इस से यह बनाने की रीति सिद्ध हुई, ॥

यथा, क ख, पर, ग ह, लंघ और उस के ग च समान्तर खिंचकर ग चं = ग ह लेलो और खं ग, को, डं, में काटती हुई क चं रेखा जोड़ दो तो, डं, वर्ग का एक कोण होगा ॥

४६. एक वृत्त पर स्पर्शनी डालो जो एक दी रेखा के समान्तर होवे ॥

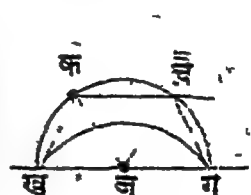
४७. एक दिये वृत्त में यैसी जीवा खींचो जो एक दी रेखा के तुल्य और दूसरी दी रेखा के समांतर होवे ॥

४८. एक वृत्त बनाओ जो दिये बिन्दु में होकर जावे और एक दी रेखा को दिये बिन्दु में छुए ॥

४९. दी चिज्या से एक वृत्त बनाओ जिसका एक दी रेखा में तो केन्द्र होवे और जो दूसरी दी रेखा को छुए ॥

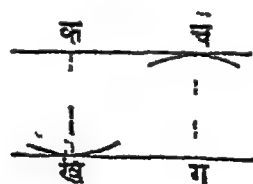
५०. ख ग, रेखा के समांतर, क, दिये बिन्दु में होकर, एक रेखा खींचो.

ख ग, में कोई, ज, बिन्दु को केन्द्र माने कर ज क, दूरी की चिज्या से ख क ग, अर्द्ध वृत्त बनाओ और ख क, दूरी को लेकर उसे च ग, चाप पर, ग, से, च, तक देखो वो



लगाओ, अब, क और च, में होकर, क च रेखा खींच दो, यही ख ग रेखा के समांतर होवेगी ॥

अथवा प्रकीर्णान्तर से, यथा, क, दिये बिन्दु को केन्द्र मानकर (परीक्षा से कंपास का ऐसा विस्तार लेकर) एक चाप बनाओ कि वह दी रेखा को, ख बिन्दु में स्पर्श करे, और उसी विस्तार से ग, केन्द्र



पर, च, चाप बनाकर, उसी ठीक छूती हुई, क, से, क च, रेखा खींचो तो यही, ख ग, के समांतर होगी, प्रमाण से सिद्ध करो ॥

५१. एक वृत्त बनाओ जो एक दिये वृत्त को दिये बिन्दु में छुए और एक दिये बिन्दु में होकर जावे ॥

५७. एक दिये वृत्त पाद के अतर्गत एक वृत्त बनाओ ॥
प्रमेयोपपादों ॥

५८. रेखागणित के ४७ क्षेत्र को एक सीधी रीति बतलओ जब कि भुज कोटि टेना तुल्य है ॥

५९. समचिवाहु त्रिभुज के लंब का वर्ग, भुज के वर्ग से पोंनों होना है ॥

६०. वर्ग की भुजाओं के मध्य बिन्दु तक खिंची रेखा, दिये उस वर्ग के आधे के तुल्य एक वर्ग बनावेगी ॥

६१. त्रिभुज के आधार के मध्य में पड़ी रेखा, आधार के समान्तर सब रेखाओं के सम दो भाग करेगी ॥

६२. समान्तरवाहु में कर्णों का बर्गयोग, भुजों के बर्गयोग के तुल्य होता है ॥

६३. समचिवाहु त्रिभुज के भीतर किसी बिंदु से भुजाओं पर पड़े लंबों का योग, उस त्रिभुज के लंब के तुल्य होता है ॥

६४. किसी चतुर्भुज की भुजाओं के सम दो भाग करके भाग बिंदु जोड़ दिये जावें तब इस प्रकार से बना क्षेत्र समान्तरवाहु होवेगी ॥

६५. त्रिभुज की दो भुजाओं का योग, सिरों से आधार के मध्य तक खिंची दूनी रेखा में बड़ा होगा ॥

६६. दो समान्तर जीवाओं से कटे बीच के धनुष समान होते हैं ॥

६७. दो वृत्तों के, जो आपस में काटते हैं, एक संपात बिंदु में होकर वृत्तों तक खिंची एक रेखा के सिरों से दूसरे संपात बिंदु तक खिंची रेखा सदैव एक ही वा तुल्य कोण बनावेगी ॥

६८ चिभुज की एक भुज के मध्य से आधार के समांतर खिंची रेखा सन्मुख की भुजा के सम दो भाग करेगी, और आधार के आधे के तुल्य होवेगी ॥

६९ समबाहु चिभुज के अन्तर्गत वृत्त की चिज्या; बहिर्गतवृत्त की चिज्या की आधी होती है ॥

वस्तुपपाद्य ॥

७०. आधार, सिरे का कोण और दो भुजाओं का योग दिया है चिभुज बनाना चाहिये ॥

साधन — क ख ग, आकांक्षित चिभुज मानलो (१ प्र० की आकृ० देखो) जिस में ख ग = दिया आधार, \angle ख क ग = सिरे का दिया कोण और, ख च = ख क, और, क ग, भुजाओं का योग, अब, ग च, जोड़ दो तो, क ग च, समद्विबाहु चिभुज होगा ॥ और इसलिये \angle ख क ग = $2 \angle$ ख च ग, इस से यह बनाने की राति सिद्ध होती है; ख ग दिये आधार, पर एक ऐसा वृत्त बनाओ जिसमें \angle ख च ग = दिये सिरे के कोण का आधा, (६॥ साध्य प्रयो० प्र० १) ॥

ख, केन्द्र पर, दो भुजाओं के योग, ख च, की चिज्या से, वृत्त को, च, पर काटती हुई एक चाप बनाकर, ग च, और ख च, जोड़ दो, और \angle क ग च = \angle क च ग, बनाती हुई, क ग, रेखा करलो तो, क ख ग आकांक्षित चिभुज होवेगा, ॥

७१ भुजा का योग और आधार पर के कोण दिये हैं चिभुज बनाओ ॥

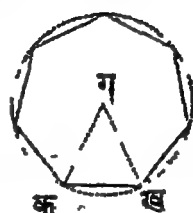
७२. एक सरल रेखा खिंचो जो दो दिये वृत्तों को स्पर्श करे, ॥

७३ एक वृत्त बनाओ जो एक दी रेखा को दिये बिन्दु में और एक दिये वृत्त को भी छूए

७४ क ख, एक दी रेखा पर कितने ही दृष्ट भुज का एक समबहुभुज बनाना चाहिये ॥

यथा दृष्टभुज की सख्या आठ मानलो अर्थात् अष्टभुज बना-
ना है ॥

साधन — दृष्ट सिद्ध और बेहिर्गत वृत्त का, ग, केन्द्र मान-
कर, क ग, ख ग, जोड़दो तो, क ग ख,
समद्विबाहु त्रिभुज होगा, और $\angle क = \angle$
ख, इस से, $2 \angle क + \angle ग = 180^\circ$, और
 $\therefore \angle क = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ग)$ परन्तु \angle
 $ग = 36^\circ$ का $\frac{1}{2} = 18^\circ \therefore \angle क = \frac{1}{2}$
 $(180^\circ - 36^\circ) = 72^\circ$ इस से यह बनाने की रीति सिद्ध हुई ॥

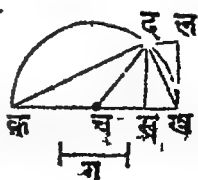


यथा — $\angle क = \angle ख = 72^\circ$, बनातो हुई, क ग, ख ग,
रेखा खैचकर, ग, केन्द्र और, ग क, वा ग ख, त्रिज्या से एक
वृत्त बनाओ, और उस में, क ख, के तुल्य सब जीवा खैचलो
तो आकांचित बहुभुज बन जायगा ॥

७५ दिये वृत्त में कितनी ही मानी भुजों का एक समबहु-
भुज बनाओ ॥

७६ क ख, एक दी रेखा के, क स, ख स, दो ऐसे भाग करो
कि उन्हें का घात, ग, दी रेखा के वर्ग के
तुल्य होवे ॥

निर्माण प्रकार — क ख, को, च, से आधार
करके, च, केन्द्र पर, च क, वा, च ख,

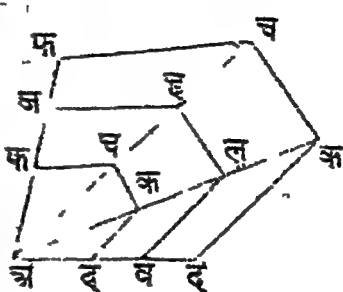


त्रिज्या से, क द ख, अर्द्धवृत्त बनालो, और क ख, पर, ख ल, लंब
डालकर, उसे, ग, के तुल्य करलो, अत्र, वृत्त को, द, में काटती

हुई, क ख, के समान्तर, ट ल खैचकर, द, से, क ख, पर, द स लंब डाललो, तो, अ स. ख स, = ग, अब इसे सिद्ध किया चाहिये: ॥

७७. अब ल ह जे, एक दिये सरलभुजक्षेत्रों के सजातीय, अ ठ क च फ, एक सरलभुजक्षेत्र बनाओ ॥

अ ल, और, च ह को जोड़ कर आवश्यक होवे तो बढ़ा दो, और आकृति क्षेत्र की भुज के तुल्य अ ट, लेकर; व ल, के समान्तर द क, और ल ह, के समान्तर, च, तथा, ह व के



समान्तर, च फ, खैचलो, तो, अ ट क च फ, अ व ल ह ज, के समान्तर होगा क्योंकि, इ१ प्र० से $\angle अकद = \angle अल$ व, और $\angle अक < = \angle अलह$, इसलिये इन समानों को जोड़ने से $\angle दक = \angle वलह$, तथा ठीक २ इसी रीति से यह भी सिद्ध हो जायगा कि $\angle कचफ = \angle लहज$, इत्यादि इससे क्षेत्र तुल्य कोण हूय, तथा सजातीय त्रिभुजों से, अ क. व ल :: ट क व ल, और अ क : अ ल :: क च : ल ह: इसी रीति से यह भी सिद्ध होसक्ता है कि क च, ल ह च फ. ह ज इत्यादि ॥

इस से तुल्य कोणों के पास की भुजा समनिष्पत्तिक है और इसलिये क्षेत्र सजातीय हैं ॥

तथा इन सजातीय क्षेत्रों में इन्हो को सदृश भुजों के धर्म की निष्पत्ति है ॥

$$\text{यथा, } \frac{\text{अ च फ क्षेच}}{\text{अ ज ह क्षेच}} = \frac{\text{अ च}^0}{\text{अ ह}^0} = \frac{\text{अ ल}^2}{\text{अ व}^0};$$

$$\therefore \frac{\text{अ च फ क्षेच}}{\text{अ द}^0} = \frac{\text{अ ह ज क्षेच}}{\text{अ व}^2} \text{ इसी रीति से } \frac{\text{अ क च क्षे}^0}{\text{अ ट}^0} =$$

$$\frac{\text{अ ल ह क्षेच}}{\text{अ व}^0}, \text{ और } \frac{\text{अ ट क क्षेच}}{\text{अ ट}^2} = \frac{\text{अ व ल क्षेच}}{\text{अ व}^2} \text{ इन तुल्यों को}$$

$$\text{आपस में जोड़ देने से } \frac{\text{अ ट क फ क्षे}^0}{\text{अ ट}^0} = \frac{\text{अ व ल ज क्षे}^0}{\text{अ व}^2}$$

$$\therefore \frac{\text{अ ट क फ क्षे}^0}{\text{अ व ल ज क्षे}^0} = \frac{\text{अ द}^0}{\text{अ व}^2} \parallel$$

प्रमेयोपपाद्य ॥

४८. एक ही, ख ग, आधार पर, क ख ग, म ख ग, तुल्य त्रिभुज एक ही समान्तर रेखाओं के मध्य में होंगे ॥

व्याप्ति, ख ग, के समान्तर, क म, न होवे तो, उसके समान्तर, क न, खँच कर, न ग, जोड़ दो, अब, ४१ प्र० से,

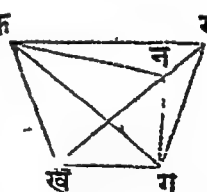
$\triangle क ख ग = \triangle न ख ग$, परंतु इष्ट क

से $\triangle क ख ग = \triangle म ख ग \therefore \triangle न$

ख ग = $\triangle म ख ग$, यह असंगत है

इस से, ख ग, के, क न, समान्तर नहीं

है ऐसे ही यह भी सिद्ध होसता है कि क म के बिना और कोई रेखा, ख ग, के समान्तर नहीं होसती ॥



४९. ज ल ग, त्रिभुज में, (२३ प्र० आकृ०) ज ल^२ = ग ज^० + 'ग ल^० होवे तो, $\angle ल ग ज$, समकोण होगा ॥

यथा, ल ग, पर, ग च लंब डालकर, ग च = ग ज, लेलो और च ल, जोड़ दो तो, ४५ प्र० से च ल^२ = ग ल^२ + ग च^२ वा ग ज^२, परंतु, ज ल^२ = ग ज^२ + ग ल^२

∴ 'च ल^२ = ज ल^२ वा च ल = ज ल, इस से प्र० १६. ज ग ल, च ग ल, चिभुज समान है, और \angle ल ग ज = \angle ल ग च = समकोण. ॥

८०. क ख ग, और न च ल, चिभुजों की सट्टेश भुजा, समनिष्पत्तिक होंगे तो वे चिभुज तुल्य कोण होंगे (५४. प्र० की, आकृति. देखें) ॥

यथा क र = न च, लेकर, ख ग, के समान्तर, र म खेंचलो तो, क ख : क ग : क र, वा न च : क म, परंतु इष्ट से, क ख : क ग :: न च : न ल, ∴ न ल = क म, और ऐसे ही च ल = र म, अर्थात् \triangle चल न, \triangle र म क, के समान है और ∴ \triangle क ख ग, के तुल्य कोण है ॥

रेखागणित में बीज क्रिया के प्रयोग ॥

६५. उक्त स्थलों में अनेक प्रश्न ऐसे कहे हैं जिन्हों से रेखागणित में बीज क्रिया पाई जाती है ॥

अब इस भाग में बीजात्मक राशों के घन ऋण मान से ही रेखागणित का क्रियाकलाप, बीज क्रिया से क्रिया जावेगा ॥

यथा, क+ख-ग, इस स्वरूप को जिस में हर एक वर्ण कुछ रेखात्मक संख्या है निर्माण करने को मानलो, ॥

अब. य य' रेखा में एक

य'	प'	च	प	न	य

नियन बिंदु-अलेकर, अ ग = क, ग य. = ख, और, य प = ग,

आपलो तो, अ प = क + ख - ग, यहां यह जानना चाहिये कि धन, राशें अ, नियत बिंदु से दाहिनी ओर को मापी जावें तो ऋण राशें उलटी ओर को मापी जावेगी और, क + ख, से, ग, अधिक होवे तो, प्रसिद्ध है कि आकाक्षित बिंदु, अ की बाईं ओर होवेगा ॥

उस प्रकार में य प' = ग रखलो तो, क + ख - ग, = ऋण राशि, इस से जाना जाता है कि दाहिनी ओर को मापी गई राशें धन, वा + मानी जावें तो बाईं ओर को मापी गई ऋण वा - मानी जावेगी इस में दिशा का कुछ नियम नहीं केवल यही है कि जिस ओर को, धन राशें मापें उसको विरुद्ध दिशा को ऋण राशें मापनी चाहियें, परन्तु परंपरा से धन राशें दाहिनी ओर और ऋण राशें बाईं ओर को बहुधा मापी जाती है ॥

इसी रीति से टी रेखा से ऊपर को धन गिनें तो उस से नीचे को ऋण दूरी गिनी जायगी ॥

१०. यथा - एक पयिक, प्रति घंटे, स, मील की गति से, ग, से, अ, की ओर को चला, कहो, घ, घंटे के पीछे, वह, अ, से, कितनी दूर रहेगा जब, य अ = म, मील ... ?

आकाक्षित स्थान, प, मानलो तो, चलित दूरी, वा, य प = म घ, और इसी से, अ प = म - स घ म = २०, स = ४, और, घ = ३ होवे तो अ प = २० - ४ × ३ = ८, इस फल से जाना जाता है कि वह अभी, अ, तक नहीं आ पहुँचा, और इसी से अ प, धन राशि गिनी जावेगी ॥

अब, $न = २०$, $म = ४$, और $घ = ६$. मानलो, तो;
 $अ प = २० - ४ \times ६ = - ४$, यहां संज्ञा होती है कि
 इस कुरा फल में क्या आगय है, परन्तु प्रश्न के नियम से स्पष्ट
 है कि वह पश्चिम, अ, से आगाड़ी बढ़ गया है अर्थात् वह
 ४ मील अ, से आगे बढ़ गया है और इसी से, अ, से बाईं ओर
 ४ मील पड़े, प, पर, प बिन्दु लेना चाहिये । भाग

२. अब $क = क$, गल टी रेखा, से ऐसा, अ प,
 निश्चित किया चाहिये कि $अ प^० = क प$,

य = अ प रखलो, तो $प क =$

$क - य$, इस से यह सनी ० मिट्ट हुआ, $\frac{१}{४} \frac{अ प क}{१}$

$य^० = क - य$, और $\therefore य = \frac{१}{४} (४क + १ - १)$

$क = ६$ मानो तो, $य = ०$ वा $- ३$. इसी से यहां टी
 बिन्दु है जिन्हों से प्रश्न का नियम पूरा होता है अर्थात् अ प
 $= ०$, और अ प' $= ३$. क्योंकि इसके ये विनियोग मिलते हैं,

यया अ प' $= क प$ अर्थात् $३^० = ६ - ०$, और अ
 प' $= ३$ क अर्थात् $३^० = ६ + ३$ ।

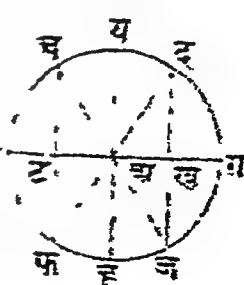
३. गगनवृत्त की विज्या, अ द, च है; क ग, व्यास पर
 पड़े द ख = ल, लंब की मिति बताओ,

य = अ ख, रखलो, तो अ द ख, समकोण त्रिभुज में अ

$ख^० = अ द^० - ल द^०$ अर्थात्, $य^०$
 $= च^० - ल^०$, $\therefore य = \frac{१}{२} (च^० - ल^०)$

अब, $च = ९$ और $ल = ३$ मानो, तो क

$य = \frac{१}{२} (९ - ३) = ३$. इस फल से
 पता है कि, अ, की दक्षिण ओर बाईं



दोनों और दिया लंब पड़ सकता है अट = अ ख = ४ लेवे और, द ख, च ट, लंब डालें तो, अ ख द, और, अ ट च त्रिभुज समान होंगे, पर इतना ही केवल अन्तर होगा, कि पहिले का आधार दाहिनी और दूसरे का बाईं ओर को मापा जायगा ॥

४. उक्त प्रश्न ने, अ द = च, और, अ ख = ग, दिये हैं, ख द को निश्चित करो, ॥

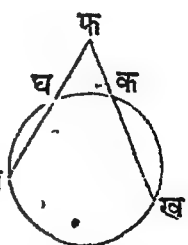
$$\begin{aligned} \text{य} &= \text{ख द, रखलो तो, य}^2 = \text{च}^2 + \text{ग}^2, \therefore \text{य} = \\ &= \pm \sqrt{\text{च}^2 + \text{ग}^2} \text{ अब, च} = १० \text{ और ग} = ६ \text{ रखलो तो, य} \\ &= \pm \sqrt{१०० + ३६} = \pm ८, \end{aligned}$$

यहा द ख, बढ़ाया जावे कि वह वृत्त को च, पर काटे तो, य, का ख द, धन और, ख ज, ऋण मान होगा ॥

इस प्रकार से, क ग, रेखा से ऊपर को धन, और नीचे को ऋण मान मापे जाते हैं ॥

५. फ, दिये बिन्दु से, क ख ग घ, दिये वृत्त को, घ, और ग, बिन्दुओं में काटती हुई एक ऐसी, फ घ ग, रेखा खींचो कि उसका, घ ग भाग, एक टी रेखा के समान होवे.

वृत्त को, क और, ख, में काटती हुई, फ क ख, रेखा खींचकर फ ख = क, फ क = ख, घ ग = ग, और, फ घ = य, रखलो तो, फ ग, = य + ग. और ६१. प्र० से, फ ग. फ घ = फ ख. फ क, अर्थात्, (य + ग) य ग = क ख. इस समी० को करने से, य



$$= \frac{1}{2} (- ग \pm \sqrt{ग^2 + ४ क ख}) \text{ अब, क} = ८, ख = ३, \text{ और ग}$$

= २ रखलो तो य = ४ वा - ६. यहाँ अनुभव के अनुसार धनमान ४ है और ऋणमान के लिये, फ, ग = ६ है क्योंकि, फ ग = य माने तो, एक समी० बन जावेगा जिस से य = ६ धनमान आवेगा ॥

वार्तिक

रेखागणित की अपेक्षा बीज क्रिया अधिक साधारण है इसी से साधन प्रक्रिया में बहुधा ऐसे फल आते हैं कि नियमों का नियत डोल बिना बटले रेखागणित की गति से ठीक = विनियोग नहीं मिलसक्ता, तथापि प्रकृत समी० में, य के स्थान में - य रखने से ऋणात्मक फल का आशय बहुधा निश्चित हो जाता है, क्योंकि इस क्रिया से सिद्ध समी० के वे ही मान आवेंगे केवल चिन्ह विपरीत होंगे ॥

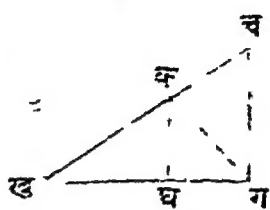
यथा पूर्व समी० में य के स्थान में - य रखने से $(-य + ग) \times - य$, वा $(य - ग) य = क. ख \therefore य = ६ वा - ४.$ यह समी० प्रत्यक्ष से भी ठीक २ फ घ. फ ग = फ ख. फ क, इस के सदृश है जिसमें, फ ग के स्थान में य है ॥

६. ग ख और ग च लंबरूप रेखाओं के मध्य में, क, बिन्दु दिया है अब, ख एक ऐसा बिन्दु निश्चित करो कि, क, में होकर खिंची, ख क च, रेखा, ख ग च क्षेत्र = म^२ काटे.

ख ग, पर, क घ, लंब डालकर, ग घ = क, क घ = ग, और ख ग = य, रखलो, तो, ख घ = य - क और ख घ : क घ :: ख ग ग च, .. य, - क : ग .. य. ग च = $\frac{ग. य}{य - क}$, परंतु ख ग. ग च = २ म^२ $\therefore य \times \frac{य. ग}{य - क} = २ म^२$

$$\therefore y = \frac{m^2}{g} - \frac{m}{g} \sqrt{m^2 - 2kg}$$

यहाँ, y , के दोनों मान, मटा धन और यथार्थ है जब कि $2kg$ से, m^2 बड़ा है परन्तु m^2 से $2kg$ बड़ा होवे तो प्रश्न असंभव होगा क्योंकि वहाँ कृष्ण राशि का मूल लेने को होगा और क, ख बिन्दु ग च रेखा में लिया जावे तो



$$ग घ वा क = 0 \text{ और } y = 0 \quad \frac{m^2}{g} - \frac{m}{g} \sqrt{m^2 - 2kg} = 0, \quad g = 0 \text{ और } m^2$$

$$= 36 \text{ रखलो तो } y = \frac{36+8}{2} \sqrt{36-2 \times 9 \times 2} = 20 \text{ वा } 8,$$

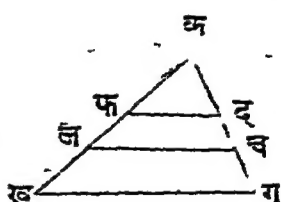
७. ज क च, टिये त्रिभुज में फ ट यन दी रेखा की स्थिति निश्चित करो, जो ज च आधार के समान्तर होवे ॥

ज घ = क, ज क = ख, फ ट = म और, ज फ = य, मानलो तो फ क = ख -

य, और, ज क च, फ क ट, सजातीय

त्रिभुजों से ज घ : ज क :: फ ट :

फ क, वा क : ख :: म : ख - य, ख



$$\therefore m \cdot ख = क (ख - य),$$

$$\therefore y = \frac{ख(क-म)}{क} \text{ अब, ख } = 8, क = 8, \text{ और } म = 2, \text{ रखलो,}$$

तो, $y = 8$. यह फल धन है इस से जाना जाता है कि,

ज च, की ऊपर की ओर को, अनुच के अनुसार ज फ मापी गई है ॥

तथा, ख = १२, क = ३, और झ = ५, मानो, तो, य = ८, अब, यह फल ऋण है इस से सूचित होता है, कि जिस मार्ग में पहले य, मापा गया था, उसकी विरुद्ध दिशा में, उसे अब मापना चाहिये, ॥

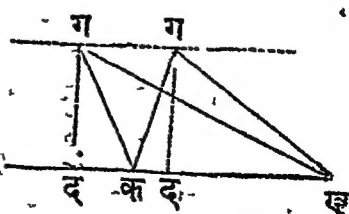
इसलिये, ज ख = ८ लेकर, ज च, के समान्तर, ख ग खैचलो तो-दी रेखा की इस प्रकार में, ख न स्थिति होवेगी. क्योंकि पूर्व अनुपात में य को - य में परिवर्तने से क : ख :: म : ख + य, आवेगा, और यह अनुपात क ज च, और क ख ग, त्रिभुजों से मिलता है ॥

८. ४५ वें प्रश्न में, पृ० १२३ त्रिभुज का आधार और लंब दिया है अन्तर्गत वर्ग की भुजा चाहिये, ॥

क ख = ख, ग द = ल, और वर्ग की भुजा, ज ह = य, रखलो, तो, क ग ख, और, ट ग ड, सजातीय त्रिभुजों से, क ख : ग द :: ट ड : ग द - ट ज, वा, ख : ल :: य : ल - य, ∴ ल य = ख. (ल - य), ∴ य = $\frac{ख \cdot ल}{ख + ल}$ ॥

९. आधार, लंब, तथा, अन्य दो भुजाओं का सम्बंध दिया है त्रिभुज निश्चित करो, ॥

क ख ग, आकांक्षित त्रिभुज, और, ग द, दिया लंब मानलो, और, क ख, = ५, ग द = २, ख ग = २ क ग, और, क द = य, रखलो, तो, ख द = ५ - य, और, क द ग, ख द ग, समकोण त्रिभुजों से, क ग २,



$= y^2 + 8$; और ख ग^२ $= (y - y)^2 + 8$; परं
 ख ग $= २$ क ग, वा, ख ग^२ $= ४$ क ग^२ $\therefore (y - y$
 $+ ४ = ४ (y^2 + ४)$. इस से, $y = १$ वा $- ४$
 आता है. ॥

यहांप्रज्ञ के नियमों के पूरे करने जाने दो जुड़े २ चिभु
 हैं अर्थात् क ख ग, और क ख ग, जहां, क ट $= १$ और
 क ट' $= ४ \frac{१}{३}$ ॥

१०. एक समकोण चिभुज का आधार $= ६$, तथा टुर्न
 कोटि और कर्ण का योग, $= २६$; कोटि चाहिये, .. उत्तर ८

११. समद्विबाहु समकोण चिभुज का कर्ण १८ है भुज
 चाहिये उत्तर १२. ८८. ३

१२. एक वृत्त पाट की चिज्या, ३, है उस के अन्तर्गत
 वर्ग की भुज चाहिये. उत्तर $\sqrt{२}$ ।

१३. वृत्त खण्ड के अन्तर्गत वर्ग की भुजा चाहिये.
 जब वृत्त की चिज्या १. और खण्ड की जीवा ८ है.

उत्तर १.६०८ वा ६.००८. ॥

१४. एक वृत्तपाट की चिज्या, ३ है उस के अन्तर्गत
 वृत्त की चिज्या चाहिये. उत्तर $\frac{३}{\sqrt{२-१}}$

१५. एक समद्विबाहु समकोण चिभुज का सीमासूत्र
 $= ४$ दिया हुआ है कर्ण चाहिये. उत्तर $\sqrt{२-१}$ ॥

१६. एक सम चिभुज के सीमासूत्र और लंब का अन्तर
 $= ८$ दिया है भुजा निश्चित करो उत्तर $\frac{२६}{६-\sqrt{३}}$

१७. एक समकोण त्रिभुज की भुजा १२ तथा दूने कर्ण और कोटि का अन्तर २१ है कोटि चाहिये. -- उत्त० ११ वा ६.

१८. एक त्रिभुज की दो भुजाओं का योग, स, तथा सरे के कोण के सम दो भाग कारक रेखा से घिरे हुए आधार के खण्ड क्रम से, ग, द, है भुजा चाहिये,

उत्त० $\frac{ग \cdot स}{ग+द}$ और $\frac{द \cdot स}{ग+द}$ ॥

१९. एक त्रिभुज का, फल = १६०, आधार = ४०, और एक भुजा २० शेष भुजा चाहिये, -- उत्त० २३.०६६, वा १८.८७६. ॥

२०. समकोण त्रिभुज की भुज और कोटि, १२ और हैं. उस के अन्तर्गत, आयत की भुजा चाहिये जिस का त्रिभुज के फल से आधा है -- उत्त० ६ और ८ ॥

२१. सम त्रिभुज के भीतर एक बिन्दु से भुजाओं पर पड़े तीन लंब ४, ६, और ८ है, भुजाओं को निश्चित किया चाहिये. -- उत्त० $१०\sqrt{३}$

२२. एक वर्गचित्र के कर्ण की सीध में मैं ने एक बिन्दु लेकर देखा तो वर्ग के समीप के कोणों से उसकी दूरी, ४०, और ६० हुई, वर्ग की भुज चाहिये, -- उत्त० २४६३. ॥

॥ इति रेखामितितत्वम् ॥